

METODI APROKSIMACIJE AMPLITUDNIH I FAZNIH KARAKTERISTIKA ANALOGNIH FILTERA

Projektovanje filtera, pojam pod kojim podrazumijevamo određivanje funkcije prenosa sistema sa željenim karakteristikama, oslikava našu potrebu za idealnim filtrom, koji bi trebao da bez slabljenja propušta signale iz propusnog opsega, dok bi signali iz nepropusnog opsega trebali biti beskonačno oslabljeni, tako da njihova amplituda na izlazu filtra bude jednaka nuli. Takođe je poželjno postići da signali čije se sve frekvencijske komponente nalaze u propusnom opsegu prođu kroz filter bez izobličenja. Međutim, funkcije prenosa sistema kojima realizujemo filtre su realne racionalne funkcije kompleksne učestanosti, sa konačnim brojem nula i polova. Prilikom projektovanja filtera realizabilnih ovom klasom funkcija prenosa, idealne karakteristike filtera nije moguće postići, već se one mogu samo aproksimirati. Stoga i specifikacije filtera moraju uzeti u obzir ove neidealnosti, te se u njima navode granične učestanosti propusnih i nepropusnih opsega, maksimalno dozvoljeno slabljenje u propusnom i minimalno potrebno slabljenje u nepropusnom opsegu. Prilikom projektovanja, prvo se aproksimacionim metodima postiže željena amplitudna karakteristika, a zatim se fazna karakteristiku koriguje ekvalizatorima faze.

2.1 Funkcije prenosa analognih filtara

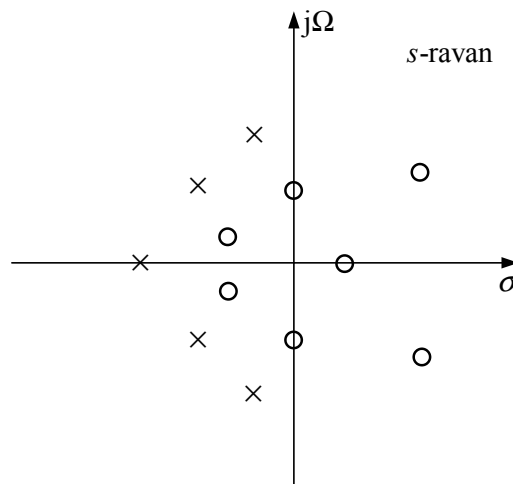
Podsjetimo se da je funkcija prenosa linearnih, vremenski invarijantnih sistema, iskazana kao količnik Laplasove transformacije odziva $Y(s)$ i Laplasove transformacije eksitacije $X(s)$ pri nultim početnim uslovima, zapravo količnik dva polinoma $N(s)$ i $D(s)$ sa realnim koeficijentima:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (2.1)$$

tzv. *realna racionalna funkcija*. Nakon faktorizacije polinoma u brojniku i nazivniku, funkcija prenosa se može zapisati u obliku:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}. \quad (2.2)$$

Budući da su koeficijenti funkcije $H(s)$ realni, njene nule i polovi dolaze u konjugovano kompleksnim parovima. Na Slici 2.1 je prikazan jedan mogući raspored nula i polova funkcije prenosa u kompleksnoj s ravni.



Slika 2.1 Mogući raspored nula i polova funkcije prenosa u kompleksnoj s ravni.

Korijeni polinoma $D(s)$ su *polovi* funkcije prenosa $H(s)$. Gledano u kompleksnoj s ravni, za stabilne sisteme vrijedi da se polovi funkcije prenosa nalaze u lijevoj poluravni, a karakteristični polinom $D(s)$ mora biti *Hurvičov (Hurwitz) polinom*, tj. imati sve koeficijente realne i pozitivne, a korijene u lijevoj poluravni.

Ako svi korijeni polinoma $N(s)$ leže na imaginarnoj osi ili u lijevoj poluravni kompleksne s ravni, funkcija prenosa $H(s)$ se naziva *minimalno fazna funkcija*. Korijeni polinoma $N(s)$ su *nule* funkcije prenosa $H(s)$.

Sa stanovišta amplitudne karakteristike nevažno je da li funkcija prenosa ima nule koje leže u lijevoj ili u desnoj poluravni, pod uslovom da su raspoređene na isti način. Pod tim podrazumijevamo da nule iz jedne poluravni predstavljaju sliku u ogledalu nula iz druge poluravni, tj. da su osno simetrične u odnosu na imaginarnu osu. Ipak treba voditi računa o tome da filter sa funkcijom prenosa koja ima nule u lijevoj poluravni ima manju fazu, što u praktičnim realizacijama znači manje kašnjenje signala.

Primjer 2.1:

Odrediti amplitudne i fazne karakteristike filtera čije su funkcije prenosa $H_1(s) = \frac{s+z}{s+p}$ i $H_2(s) = \frac{s-z}{s+p}$, gdje su z i p realne i pozitivne konstante.

Rješenje:

Oba zadata sistema imaju istu amplitudnu karakteristiku:

$$|H_1(\Omega)| = |H_2(\Omega)| = \sqrt{\frac{\Omega^2 + z^2}{\Omega^2 + p^2}}, \quad (2.3)$$

ali su im fazne karakteristike različite:

$$\arg H_1(\Omega) = \arctg \frac{\Omega}{z} - \arctg \frac{\Omega}{p}, \quad (2.4)$$

$$\arg H_2(\Omega) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{z} - \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{p}. \quad (2.5)$$

Kako je:

$$\operatorname{arctg} \frac{\Omega}{z} \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.6)$$

slijedi:

$$\arg H_2(\Omega) - \arg H_1(\Omega) = \pi - 2\operatorname{arctg} \frac{\Omega}{z} \geq 0. \quad (2.7)$$

Dakle, sistem sa funkcijom prenosa koja ima nulu u desnoj poluravni ima veću fazu. Razmatranje se lako proširi na sisteme sa više nula funkcije prenosa.

□

Da bi se olakšalo projektovanje filtera, vrši se *normalizacija kompleksne učestanosti* dijeljenjem sa pogodno odabranom normalizujućom učestanošću Ω_0 , koja je najčešće jednaka graničnoj učestanošći propusnog opsega:

$$s_n = \frac{s}{\Omega_0}. \quad (2.8)$$

Analogno vrijedi za kružnu učestanost. *Normalizovanu kružnu učestanost* ćemo označavati malim slovom ω , tako da je:

$$\omega = \frac{\Omega}{\Omega_0}. \quad (2.9)$$

Radi jednostavnijeg postupka realizacije filtera vrši se i *normalizacija impedanse* dijeljenjem svih impedansi proizvoljno odabranom otpornošću R_0 , čime se dobijaju *normalizovane vrijednosti elemenata*:

$$R_n = \frac{R}{R_0}, \quad (2.10)$$

$$L_n = L \frac{\Omega_0}{R_0}, \quad (2.11)$$

$$C_n = C\Omega_0 R_0. \quad (2.12)$$

NP filter kod koga je izvršena normalizacija učestanosti i normalizacija impedansi zvaćemo *NP prototip*.

2.2 Specifikacija amplitudne i fazne karakteristike

Zahtjevi koje treba da zadovolji filter se obićno zadaju u ustaljenom stanju, funkcijom prenosa:

$$H(s) = V_{izl}(s)/V_{ul}(s)|_{s=j\Omega}, \quad (2.13)$$

gdje je sa $V_{ul}(s)$ oznaćena Laplasova transformacija ulaznog, a sa $V_{izl}(s)$ izlaznog napona na pristupnim krajevima filtra. Modul ove funkcije prenosa na imaginarnoj osi:

$$|H(\Omega)| = |H(s)|_{s=j\Omega} \quad (2.14)$$

je amplitudna karakteristika filtra, dok je njen argument na imaginarnoj osi:

$$\varphi(\Omega) = \arg(H(s))|_{s=j\Omega} \quad (2.15)$$

fazna karakteristika filtra.

Za određivanje funkcije prenosa filtra neophodno je postaviti zahtjeve koje filter treba da zadovolji u pogledu amplitudne i fazne karakteristike. Uobićajeno je zahtjeve za amplitudnu karakteristiku izraćavati u decibelima:

$$M(\Omega) = -R(\Omega) = 20 \log |H(\Omega)| [\text{dB}], \quad (2.16)$$

gdje se sa $M(\Omega)$ oznaćava *kriva pojaćanja (magnituda)*, a sa $R(\Omega)$ *kriva slabljenja* filtra. Za konkretnu učestanost govorimo o *pojaćanju*, odnosno *slabljenju* filtra na toj učestanosti.

Zahtjevima u pogledu amplitudne karakteristike se zadaju granićne frekvencije propusnih i nepropusnih opsega, pojaćanje jednosmjerne

komponente, dozvoljena odstupanja slabljenja u propusnim opsezima i neophodna slabljenja u nepropusnim opsezima. Na Slici 2.2 prikazan je način specificiranja amplitudne karakteristike za različite tipove filtara. Ovdje su sa PO označeni propusni, sa NPO nepropusni, a sa TO prelazni opsezi. Kružne učestanosti Ω_p , Ω_{pn} i Ω_{pv} su *granične učestanosti* propusnih, Ω_s , Ω_{sn} i Ω_{sv} nepropusnih opsega, dok R_p , R_{pn} , R_{pv} označavaju slabljenja u propusnim, a R_s , R_{sn} , R_{sv} u nepropusnim opsezima.

Funkcija niskopropusnog filtra je da propusti spektralne komponente niskih frekvencija od jednosmjernog signala do željene granične frekvencije i da oslabi visokofrekvencijske komponente signala. Ovaj filter se specificira graničnom učestanošću Ω_p propusnog, graničnom učestanošću Ω_s nepropusnog opsega, pojačanjem jednosmjerne komponente, te slabljenjima u propusnom i nepropusnom opsegu. Slično se specificira i visokopropusni filter. U praksi, propusni opseg visokopropusnog filtra se ne proteže do beskonačnosti, već je ograničen parazitnim kapacitivnostima. Propusnik i nepropusnik opsega imaju po dva prelazna opsega koji ne moraju biti simetrični, ali su filtri sa simetričnim prelaznim opsezima jednostavniji za projektovanje.

U nekim aplikacijama oblik fazne karakteristike nije bitan, te je dovoljno zadovoljiti zahtjeve za magnitudu. Međutim, postoje slučajevi kada je neophodno voditi računa o obliku fazne karakteristike, te se osim zahtjeva za amplitudnu karakteristiku specificira i željena fazna karakteristika ili željeno *grupno kašnjenje*, koje se definiše sa:

$$\tau(\Omega) = -\frac{d\varphi(\Omega)}{d\Omega}. \quad (2.17)$$

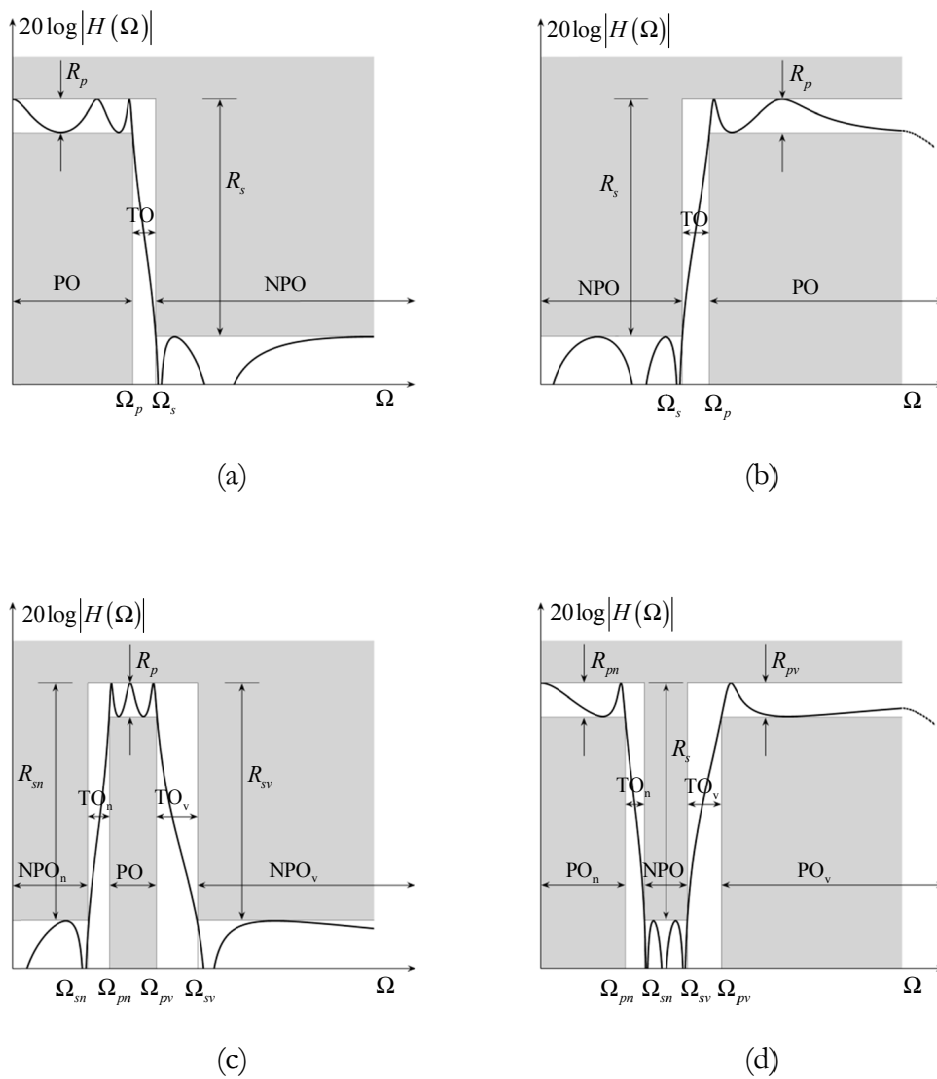
Ako sistem treba da obezbijedi idealan prenos signala bez izobličenja, onda izlaz mora da bude savršena replika ulaza, eventualno pomnožen sa nekom konstantom K i zakašnjen za neko τ_0 , tj.:

$$y(t) = Kx(t - \tau_0). \quad (2.18)$$

Funkcija prenosa takvog sistema je:

$$H(s) = Ke^{-s\tau_0}. \quad (2.19)$$

Ovakav sistem ima konstantnu amplitudnu karakteristiku K , linearnu faznu karakteristiku $\varphi(\Omega) = -\tau_0\Omega$ i konstantno grupno kašnjenje $\tau(\Omega) = \tau_0$.



Slika 2.2 Specifikacije amplitudnih karakteristika filtara: (a) NP filter; (b) VP filter; (c) filter PO i (d) filter NPO.

U slučaju kada je fazna karakteristika linearna:

$$\varphi(\Omega) = -\tau_0 \Omega, \quad (2.20)$$

ako pretpostavimo da je signal na ulazu filtra prostoperiodična funkcija:

$$x(t) = \cos \Omega_0 t, \quad (2.21)$$

signal na izlazu će biti:

$$x(t) = \cos(\Omega_0 t + \varphi(\Omega_0)) = \cos(\Omega_0 t - \tau_0 \Omega_0) = \cos \Omega_0 (t - \tau_0). \quad (2.22)$$

U ovom slučaju, kašnjenje signala u vremenu τ_0 pri prolasku kroz filter jednako je grupnom kašnjenju za tu učestanost:

$$\tau(\Omega_0) = -\left. \frac{d\varphi}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} = \tau_0. \quad (2.23)$$

Grupno kašnjenje u ovom slučaju ne zavisi od učestanosti, što znači da sve frekvencijske komponente signala podjednako kasne pri prolasku kroz filter.

Posmatrajmo sada filter sa amplitudnom karakteristikom koja je jednaka jedinici i proizvoljnim oblikom fazne karakteristike. Amplitude pojedinačnih frekvencijskih komponenti se neće promijeniti prolaskom signala kroz ovakav filter. Međutim, ako je fazna karakteristika nelinearna, fazno kašnjenje pojedinačnih frekvencijskih komponenti signala nije podjednako, te dolazi do promjene oblika signala.

Veza između faznog kašnjenja, tj. vremenskog pomaka pojedinačnih frekvencijskih komponenti signala na izlazu filtra u odnosu na frekvencijske komponente ulaznog signala, i grupnog kašnjenja nije jednostavna. Ona zavisi od oblika krive grupnog kašnjenja, odnosno fazne karakteristike. Na primjer, ako je u okolini posmatrane učestanosti grupno kašnjenje približno linearno, što znači da se fazna karakteristika u okolini te učestanosti može približno opisati kvadratnom zavisnošću:

$$\varphi(\Omega) = -(\tau_0/\Omega_0) \Omega^2, \quad (2.24)$$

približno fazno kašnjenje ove frekvencijske komponente signala se može odrediti iz:

$$x(t) = \cos(\Omega_0 t + \varphi(\Omega_0)) = \cos\left(\Omega_0 t - \frac{\tau_0}{\Omega_0} \Omega_0^2\right) = \cos \Omega_0 (t - \tau_0) \quad (2.25)$$

i iznosi τ_0 . Za faznu karakteristiku kvadratnog oblika grupno kašnjenje očitano na mjestu odgovarajuće frekvencijske komponente signala približno je dva puta veće od njegovog faznog kašnjenja:

$$\tau(\Omega_0) = -\left.\frac{d\varphi}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_0} = \frac{\tau_0}{\Omega_0} \cdot 2\Omega_0 = 2\tau_0. \quad (2.26)$$

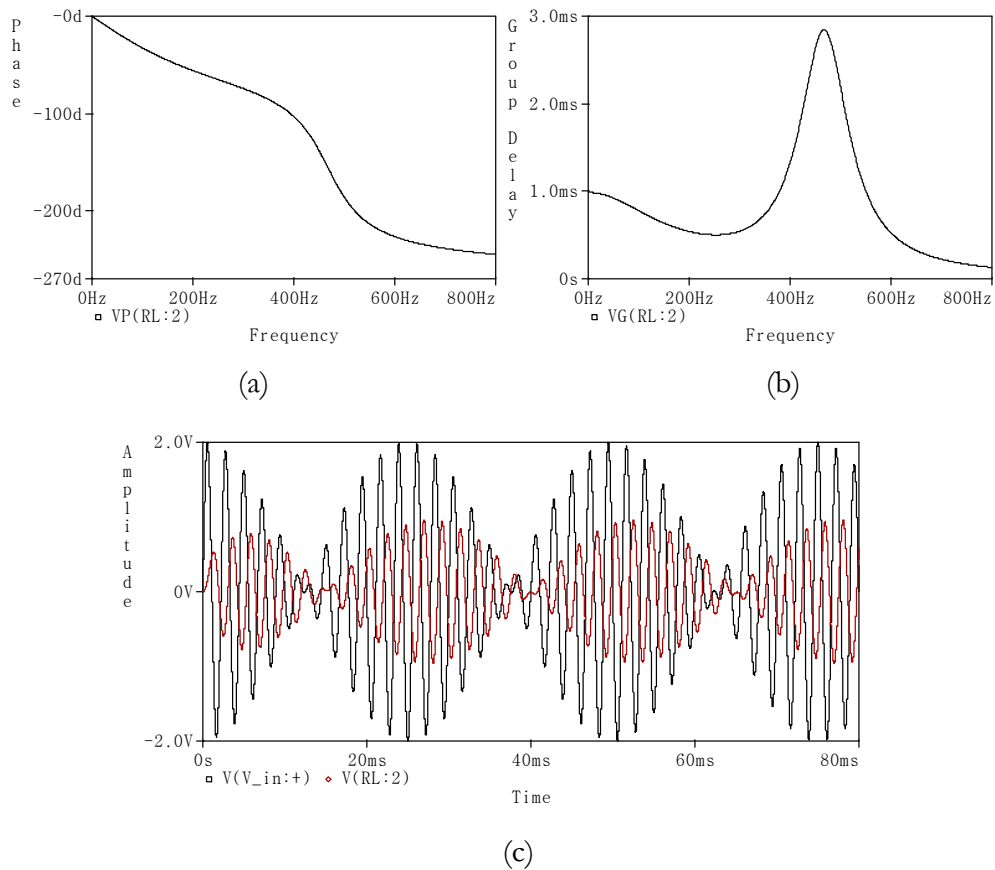
Što je nelinearnost fazne karakteristike više izražena, to je teže na ovaj način uspostaviti vezu između faznog i grupnog kašnjenja, te ćemo objašnjenje fizičkog značenja pojma grupnog kašnjenja potkrijepiti rezultatima simulacije.

U fizičkom smislu se grupno kašnjenje može posmatrati kao kašnjenje sporopromjenljive anvelope signala koji se sastoji od frekvencijskih komponenti iz uskog frekvencijskog opsega. Kašnjenje anvelope signala približno je jednako grupnom kašnjenju očitano na frekvenciji one komponente signala koja se nalazi u sredini posmatranog frekvencijskog opsega.

Kako bismo ilustrovali značenje grupnog kašnjenja kao kašnjenja anvelope signala, posmatrajmo filter sa faznom karakteristikom i grupnim kašnjenjem prikazanim na Slici 2.3. Dovedimo na ulaz filtra složenoperiodičan signal koji se sastoji od dvije komponente učestanosti $f = 430\text{Hz}$ i $f = 470\text{Hz}$ iz opsega gdje je fazna karakteristika nelinearna i gdje karakteristika grupnog kašnjenja ima izražene vrhove. Frekvencija anvelope ovog složenoperiodičnog signala iznosi $f = 20\text{Hz}$:

$$(1/2)\cos(2\pi \cdot 430) + (1/2)\cos(2\pi \cdot 470) = \cos(2\pi \cdot 20)\cos(2\pi \cdot 450). \quad (2.27)$$

Iz rezultata simulacije se može zaključiti da anvelopa složenoperiodičnog signala na izlazu kasni u odnosu na anvelopu ulaznog signala za približno 2.6ms koliko i iznosi grupno kašnjenje na učestanosti u sredini posmatranog frekvencijskog opsega, na učestanosti $f = 450\text{Hz}$.



Slika 2.3 (a) Fazna karakteristika; (b) grupno kašnjenje i (c) kašnjenje anvelope signala.

Prilikom projektovanja filtera sa zadatom amplitudnom i faznom karakteristikom može se desiti da sistem nije minimalno fazni, tj. da funkcija prenosa ima nule u desnoj poluravni kompleksne s ravni. Malo kasnije ćemo vidjeti da je sa stanovišta realizacije pasivnih filtera, koji se izvode u vidu ljestvičastih mreža, pogodno da nule funkcije prenosa budu na imaginarnoj osi.

Zbog toga se funkcija prenosa koja ima nule u desnoj poluravni kompleksne s ravni, tzv. *neminimalno fazna funkcija* prenosa $H_N(s)$, razdvaja na dvije funkcije prenosa i zapisuje u obliku proizvoda minimalno fazne funkcije prenosa $H_M(s)$ i funkcije prenosa filtra svepropusnika $H_{SO}(s)$:

$$H_N(s) = H_M(s) \cdot H_{SO}(s). \quad (2.28)$$

Prvo se realizuje minimalno fazna funkcija prenosa $H_M(s)$ koja ispunjava zahtjeve u pogledu amplitudne karakteristike, a zatim se željena fazna karakteristika postiže kaskadnim vezivanjem filtra svepropusnika opsega $H_{SO}(s)$. Kaskadnim vezivanjem filtra svepropusnika opsega se ne mijenja amplitudna karakteristika prvog filtra, jer je funkcija prenosa kaskadne veze jednaka proizvodu funkcija prenosa u kaskadnoj vezi, a amplitudna karakteristika filtra svepropusnika opsega je jednaka jedinici za svaku učestanost.

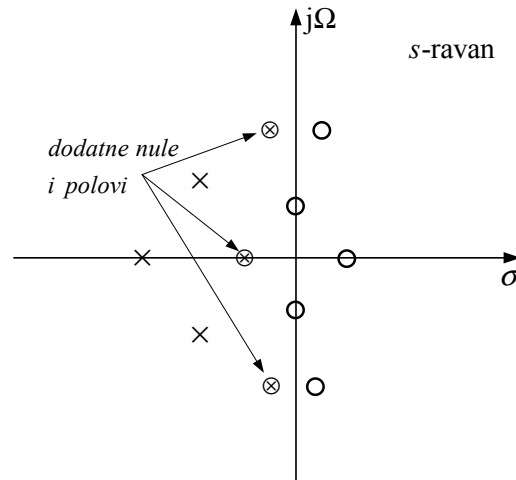
Razdvajanje funkcije prenosa $H_N(s)$ projektovanog filtra na minimalno faznu funkciju prenosa $H_M(s)$ i funkciju prenosa filtra svepropusnika $H_{SO}(s)$ se vrši na sljedeći način. Posmatrajmo prvo raspored nula i polova neminimalno fazne funkcije $H_N(s)$ u kompleksnoj s ravni, kao na Slici 2.4. Dopunimo ovu sliku polovima i nulama u tačkama koje predstavljaju slike u ogledalu nula iz desne poluravni. Te dodatne nule i polove smo označili sa " \otimes ". Svepropusna funkcija $H_{SO}(s)$ se formira grupišući nule iz desne poluravni u polinom u brojniku $N_{SO}(s)$, a polove koji su njihova slika u ogledalu iz lijeve poluravni u polinom u nazivniku $D_{SO}(s)$:

$$H_{SO}(s) = \frac{N_{SO}(s)}{D_{SO}(s)}. \quad (2.29)$$

Minimalno fazna funkcija $H_M(s)$ sadrži preostale polove i nule iz lijeve poluravni (uključujući imaginarnu osu).

Funkcija prenosa filtra svepropusnika $H_{SO}(s)$ ima nule u desnoj poluravni i polove u lijevoj poluravni koji su slika u ogledalu nula iz desne poluravni, pa vrijedi da je:

$$N_{SO}(s) = \pm D_{SO}(-s). \quad (2.30)$$



Slika 2.4 Postupak razdvajanja neminimalno fazne funkcije prenosa na minimalno faznu funkciju prenosa i funkciju prenosa filtra svepropusnika.

Amplitudna karakteristika filtra sa ovako formiranim polinomima u brojniku u nazivniku njegove funkcije prenosa je:

$$|H(\Omega)| = 1, \quad \forall \Omega, \quad (2.31)$$

te se zaista radi o filteru svepropusniku opsega sa frekvencijskom karakteristikom:

$$H_{so}(\Omega) = e^{-j2\arctg \frac{D_i(\Omega)}{D_r(\Omega)}}, \quad (2.32)$$

gdje je $D_r(\Omega)$ realni, a $D_i(\Omega)$ imaginarni dio polinoma $D_{so}(\Omega)$.

Dakle, na ovaj način možemo postići proizvoljnu faznu karakteristiku filtra, odnosno željeno kašnjenje, a da se pri tome ne promijeni prethodno postignuta amplitudna karakteristika. Zbog toga se filter svepropusnik opsega naziva i ekvalizator faze ili kašnjenja.

2.3 Aproksimacija amplitudne karakteristike NP filtra

Da bi realizacija filtera bila moguća linearnim, vremenski invarijantnim električnim mrežama, čije su funkcije prenosa realne i racionalne funkcije:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (2.33)$$

u istom obliku treba, na osnovu postavljenih zahtjeva, odrediti i funkciju prenosa filtra. Međutim, ovakvim oblikom funkcije prenosa se ne mogu postići frekvencijske karakteristike idealnog filtra, već ih je moguće samo aproksimirati. Pri tome, kvadrat amplitudne karakteristike normalizovanog NP filtra:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{|N(\omega)|^2}{|D(\omega)|^2} = \frac{N(\omega)N(-\omega)}{D(\omega)D(-\omega)} = \frac{P(\omega^2)}{E(\omega^2)} \quad (2.34)$$

u propusnom opsegu $|\omega| \leq 1$ treba da aproksimira jedinicu uz *maksimalno dozvoljeno slabljenje* dato sa $R_p [dB]$, dok u nepropusnom opsegu $|\omega| > 1$ treba da aproksimira nulu sa slabljenjem većim od *minimalno propisanog slabljenja*, datog sa $R_s [dB]$. U prethodnim relacijama smo koristili oznake:

$$P(\omega^2) = N(\omega)N(-\omega), \quad (2.35)$$

$$E(\omega^2) = D(\omega)D(-\omega). \quad (2.36)$$

U daljnjem izlaganju nećemo posebno naglašavati da li se radi o normalizovanom ili nenormalizovanom filteru jer na to ukazuju same oznake koje se koriste za učestanost kao nezavisnu varijablu. Za normalizovanu kompleksnu učestanost s nećemo uvoditi posebnu oznaku, osim kada to bude neophodno, jer je skoro uvijek iz konteksta jasno da li se radi sa normalizovanim ili nenormalizovanim kompleksnim učestanostima.

Maksimalno dozvoljeno slabljenje u propusnom opsegu dato sa $R_p [dB]$ određuje dozvoljenu *valovitost* ε^2 amplitudne karakteristike u propusnom opsegu:

$$R_p = -20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \Rightarrow R_p = 10 \log(1 + \varepsilon^2) \Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{0.1R_p} - 1. \quad (2.37)$$

Slično, ako je minimalno propisano slabljenje u nepropusnom opsegu R_s [dB], onda je dozvoljena valovitost δ^2 amplitudne karakteristike u nepropusnom opsegu data sa:

$$R_s = -20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \Rightarrow R_s = 10 \log(1 + \delta^2) \Rightarrow \delta^2 = 10^{0.1R_s} - 1. \quad (2.38)$$

Na Slici 2.5 je prikazana idealna amplitudna karakteristika NP filtra i granice u kojima treba da se nađe amplitudna karakteristika dobijena aproksimacionim metodama. Funkcije prenosa drugih tipova filtera (VP filtra, filtra PO i filtra NPO) mogu se dobiti iz funkcije prenosa NP filtra frekvencijskim transformacijama, o kojima će više riječi biti u daljnjem tekstu.

Definišimo *karakterističnu funkciju* $K(s)$ kao realnu racionalnu funkciju, takvu da je:

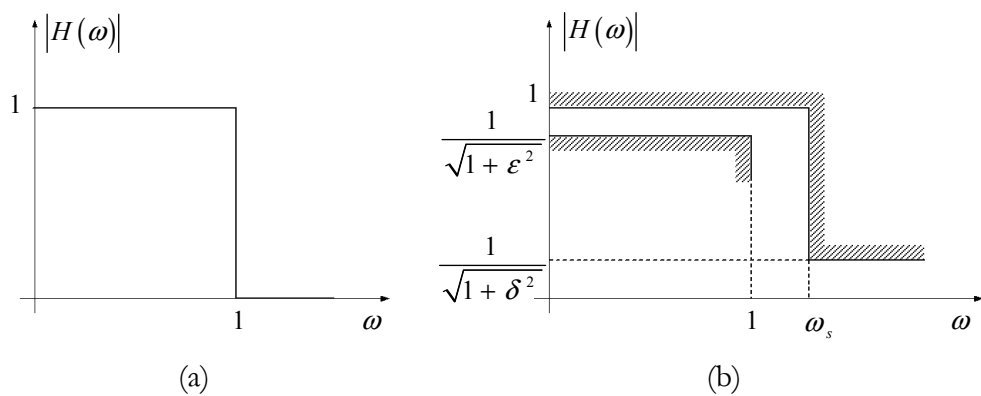
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(\omega)|^2}. \quad (2.39)$$

Za karakterističnu funkciju $K(s)$ vrijedi da je:

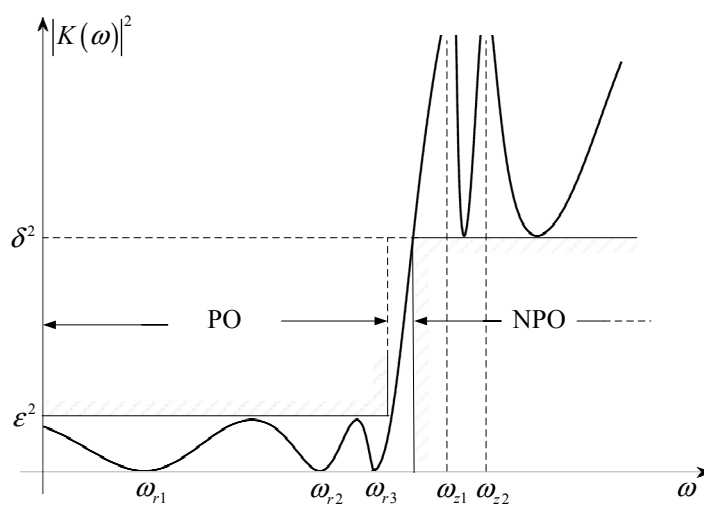
$$|K(\omega)|^2 = \frac{1}{|H(\omega)|^2} - 1 = \frac{|D(\omega)|^2 - |N(\omega)|^2}{|N(\omega)|^2} \triangleq \varepsilon^2 \frac{|F(\omega)|^2}{|N(\omega)|^2}. \quad (2.40)$$

Dakle, karakteristična funkcija $K(s)$ se definiše tako da $|K(\omega)|^2$ aproksimira nulu u propusnom opsegu, uz dozvoljenu valovitost datu sa ε^2 , te da bude veće od minimalnog propisanog slabljenja u nepropusnom opsegu datog sa δ^2 , kao na Slici 2.6.

Opšti problem aproksimacije funkcije prenosa NP filtra se svodi na pronalaženje racionalne karakteristične funkcije:



Slika 2.5 (a) Amplitudna karakteristika idealnog NP filtra i (b) granice u kojima treba da se nađe amplitudna karakteristika realnog NP filtra.



Slika 2.6 Izgled karakteristične funkcije na imaginarnoj osi.

$$K(s) = \varepsilon \frac{F(s)}{N(s)}, \quad (2.41)$$

takve da:

1. $F(s)$ ima korijene na $j\omega$ osi u propusnom opsegu,
2. $N(s)$ ima korijene na $j\omega$ osi u nepropusnom opsegu,
3. $|K(\omega)|^2 \leq \varepsilon^2$, $|\omega| \leq 1$,
4. $|K(\omega)|^2 \geq \delta^2$, $|\omega| \geq \omega_s$.

Nule polinoma $F(s)$ su *nule refleksije* ω_i , tako da za signale tih učestanosti imamo idealnu transmisiju signala $|H(\omega_i)| = 1$. Nule polinoma $N(s)$ su *nule transmisije*, označene sa ω_z . Signali tih učestanosti uopšte ne prolaze kroz filter, jer je $|H(\omega_z)| = 0$.

Iz Furijeove analize znamo da je amplitudna karakteristika sistema sa realnim impulsnim odzivom parna funkcija učestanosti. Nakon određivanja kvadrata amplitudne karakteristike $|H(\omega)|^2$ u obliku (2.34), kao količnik dva parna polinoma $P(\omega^2)$ i $E(\omega^2)$, te zamjene ω^2 sa $-s^2$, polinome $P(-s^2)$ i $E(-s^2)$ treba faktorizovati, odnosno napisati u obliku:

$$P(-s^2) = N(s)N(-s), \quad (2.42)$$

$$E(-s^2) = D(s)D(-s), \quad (2.43)$$

kako bismo mogli odrediti racionalnu funkciju $H(s) = N(s)/D(s)$.

Pri određivanju polinoma $D(s)$ iz (2.43), koristimo činjenicu da polinom $E(-s^2)$, da bi bio paran, mora imati korijene simetrične u odnosu na ishodište. Budući da $D(s)$ mora biti Hurvicov polinom, on treba da sadrži sve korijene od $E(-s^2)$ iz lijeve poluravnine kompleksne s ravni. Polinom $N(s)$ je eksplicitno određen izborom nula transmisije na $j\omega$ osi u nepropusnom opsegu:

$$N(s) = k \prod_i (s^2 + \omega_{z_i}^2)^{m_i}, \quad (2.44)$$

gdje je k konstanta, dok su ω_{z_i} nule transmisije reda m_i . Ako je $m_i = 0, \forall i$, onda filtar nema konačnih nula transmisije, tako da je $N(s) = k$ i $H(s) = k/D(s)$.

Koeficijenti funkcije prenosa u (2.33) se mogu odrediti na osnovu položaja nula i polova funkcije prenosa u kompleksnoj s ravni. Ovi koeficijenti su se ranije zadavali tabelarno (najčešće do reda 10), dok se u novije vrijeme za njihovo određivanje koriste softverski paketi, kao što je npr. MATLAB.

Stepen n u funkciji prenosa filtra (2.33) nazivamo *red filtra*. Red filtra se bira u zavisnosti od toga kojom brzinom treba da raste slabljenje na visokim frekvencijama. Amplitudna karakteristika filtra na visokim frekvencijama teži nuli sa faktorom $1/\omega^{n-m}$, a slabljenje raste sa $20(n-m)$ dB/dekadi:

$$\begin{aligned} -20 \log H(10\omega) - (-20 \log H(\omega)) &\approx -20 \log \frac{1}{(10\omega)^{n-m}} - \left(-20 \log \frac{1}{\omega^{n-m}} \right) = \\ &= 20 \log (10\omega)^{n-m} - 20 \log (\omega)^{n-m} = 20 \log 10^{n-m} = 20(n-m). \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.3.1 Batervortovi filtri

Niskopropusni *Batervortovi* (Stephen Butterworth, 1885–1958) *filtri* imaju *maksimalno ravnu amplitudnu karakteristiku* u propusnom opsegu, što znači da je ona jednaka jedinici za $\omega = 0$ (idealna transmisija jednosmjerne komponente signala), i da su sve moguće derivacije greške transmisije, koja se definiše sa:

$$\Delta(\omega^2) = 1 - |H(\omega)|^2 = \frac{|K(\omega)|^2}{1 + |K(\omega)|^2}, \quad (2.46)$$

jednake nuli za $\omega = 0$, tj.:

$$|K(0)| = 0, \quad (2.47)$$

$$\frac{d^i}{(d\omega^2)^i} \left[\frac{|K(\omega)|^2}{1+|K(\omega)|^2} \right]_{\omega=0} = 0, \quad i=1,2,3,\dots \quad (2.48)$$

Budući da je $|K(\omega)|^2$ količnik dva polinoma po ω^2 , tj.:

$$|K(\omega)|^2 = \frac{a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + \dots + a_n\omega^{2n}}{N(\omega)N(-\omega)}, \quad (2.49)$$

kako bismo zadovoljili navedene uslove mora biti $a_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, odnosno sve nule refleksije moraju biti u ishodištu, tako da je:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+|K(\omega)|^2} = \frac{|N(\omega)|^2}{|N(\omega)|^2 + a_n\omega^{2n}}. \quad (2.50)$$

Stepen n polinoma u nazivniku mora biti bar za jedan veći od stepena m polinoma u brojniku da bi transmisija bila jednaka nuli kada $s \rightarrow \infty$. Dakle, za proizvoljan polinom $N(s)$, odnosno za proizvoljan set nula transmisije, možemo konstruisati NP funkciju prenosa sa maksimalno ravnom amplitudnom karakteristikom u propusnom opsegu.

Parametar a_n se određuje na osnovu maksimalnog dozvoljenog slabljenja u propusnom opsegu. Iz postavljenih zahtjeva da slabljenje monotono raste sa učestanošću, a da ne smije biti veće od maksimalno dozvoljenog slabljenja u propusnom opsegu datog preko valovitosti ε^2 , za kvadrat amplitudne karakteristike na granici propusnog opsega vrijedi:

$$|H(1)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}. \quad (2.51)$$

Poredeći ovaj izraz sa vrijednošću kvadrata amplitudne karakteristike na granici propusnog opsega:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\frac{a_n\omega^{2n}}{|N(\omega)|^2}} \Rightarrow |H(1)|^2 = \frac{1}{1+\frac{a_n}{|N(1)|^2}}, \quad (2.52)$$

za NP filter sa maksimalno ravnom amplitudnom karakteristikom dobijamo valovitost u propusnom opsegu:

$$\varepsilon^2 = \frac{a_n}{|N(1)|^2} = 10^{0.1R_p} - 1, \quad (2.53)$$

što nam omogućava da odredimo koeficijent a_n na osnovu date vrijednosti slabljenja R_p , ako smo prethodno odredili polinom nula transmisije $N(s)$.

Veoma važan specijalni slučaj NP funkcije prenosa sa maksimalno ravnom amplitudnom karakteristikom je funkcija prenosa bez konačnih nula transmisije, sa $N(s)=1$:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}}. \quad (2.54)$$

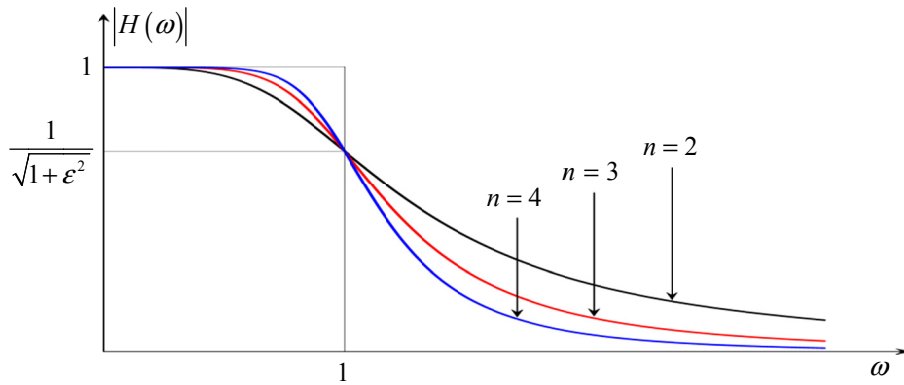
Amplitudne karakteristike normalizovanih NP filtara sa maksimalno ravnom amplitudnom karakteristikom i bez konačnih nula transmisije za $n=2, 3, 4$ su prikazane na Slici 2.7.

Za ovaj slučaj, kad slabljenje monotono opada sa porastom učestanosti, red filtra n se određuje iz uslova da slabljenje na graničnoj učestanosti nepropusnog opsega ω_s treba da bude veće od propisanog minimalno potrebnog slabljenja R_s , na sljedeći način:

$$-20 \log |H(\omega_s)| \geq R_s \Rightarrow -20 \log \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega_s^{2n}} \right)^{1/2} \geq R_s, \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} 10 \log(1 + \varepsilon^2 \omega_s^{2n}) \geq R_s &\Rightarrow \omega_s^{2n} \geq \varepsilon^{-2} (10^{0.1R_s} - 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2n \log \omega_s \geq \log [\varepsilon^{-2} (10^{0.1R_s} - 1)], \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$n \geq \frac{\log [\varepsilon^{-2} (10^{0.1R_s} - 1)]}{2 \log \omega_s}. \quad (2.57)$$



Slika 2.7 Amplitudne karakteristike normalizovanih NP filtera sa maksimalno ravnom amplitudnom karakteristikom u propusnom opsegu i bez konačnih nula transmisije za $n = 2, 3, 4$.

Da bismo odredili lokacije polova ovog filtra, u izrazu:

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H(-\omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \omega^{2n}} \quad (2.58)$$

zamijenimo ω^2 sa $-s^2$ i izjednačimo nazivnik dobijenog izraza sa nulom:

$$1 + (-1)^n \epsilon^2 s^{2n} = 0. \quad (2.59)$$

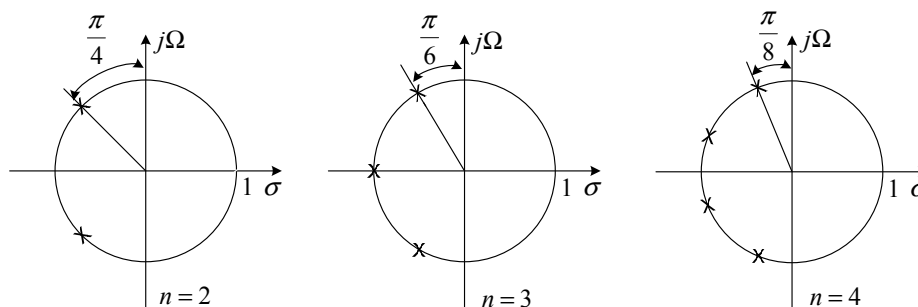
Korijeni ovog polinoma su polovi prenosne funkcije filtra:

$$s_k^{2n} = \frac{1}{\epsilon^2} (-1)^{n+1} = \frac{1}{\epsilon^2} e^{j(n+1+2k)\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.60)$$

Zadržavajući samo korijene iz lijeve poluravni imamo željene polove:

$$s_k = \epsilon^{-1/n} e^{j \frac{2k+n+1}{2n} \pi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.61)$$

raspoređene uniformno na radijusu $\epsilon^{-1/n}$, na razmaku $180^\circ/n$. Raspored polova za $n = 2, 3, 4$ je dat na Slici 2.8.



Slika 2.8 Lokacije polova Batervortovog filtra za $n = 2, 3, 4$.

Iz $\varepsilon^2 = 10^{0.1R_p} - 1$ za $\varepsilon = 1$ dobijamo da je $R_p = 3 \text{ dB}$ slabljenje na granici propusnog opsega, za $\omega = 1$. Odgovarajući NP filtar bez konačnih nula transmisije sa maksimalno ravnom amplitudnom karakteristikom ima funkciju prenosa oblika:

$$H(s) = \frac{1}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + 1} \quad (2.62)$$

i naziva se Batervortov (Butterworth) filtar. U literaturi se često i oni filtri bez konačnih nula transmisije sa maksimalno ravnom amplitudnom karakteristikom kod kojih je $\varepsilon \neq 1$ nazivaju Batervortovi filtri.

Koeficijenti b_i se računaju na osnovu položaja polova u kompleksnoj s ravni zavisno od reda filtra. Nekada su ovi koeficijenti zadavani tabelarno, dok se u novije vrijeme koriste softverski paketi koji olakšavaju ove proračune bez korišćenja tabela.

Kako se pri određivanju reda filtra uzima prvi cio broj veći ili jednak dobijenom rezultatu za n na osnovu (2.57), to znači da je istim redom filtra moguće zadovoljiti i strožije zahtjeve od postavljenih. Stoga je moguće, nakon usvajanja vrijednosti za n , na osnovu izraza $\varepsilon^2 = \frac{10^{0.1R_s} - 1}{\omega_s^{2n}}$, pronaći novu vrijednost za valovitost ε u propusnom opsegu, koja će osigurati slabljenje na granici nepropusnog opsega jednako minimalnom dozvoljenom slabljenju R_s . Pri tome se u propusnom opsegu dobije maksimalno slabljenje manje od onog

određenog zahtjevima i prvobitnom vrijednošću za ε , a učestanost na kojoj slabljenje iznosi maksimalno dozvoljenih R_p [dB] postaje veća od jedan. Sa promjenom vrijednosti za ε mijenja se poluprečnik kružnice u kompleksnoj ravni na kojoj su raspoređeni polovi prenosne funkcije Batervortovog filtra, a samim tim i funkcija prenosa filtra.

2.3.2 Čebiševljevi filtri

Pokazalo se mnogo efikasnijim, umjesto monotono rastuće greške aproksimacije u propusnom opsegu kod filtara sa maksimalno ravnom amplitudnom karakteristikom, grešku aproksimacije rasporediti ravnomjerno u propusnom ili nepropusnom opsegu. Filtre sa *jednolikim oscilacijama amplitudne karakteristike* nazivamo *Čebiševljevi* (Pafnuty Lvovich Chebyshev, 1821-1894) *filtri* ako je greška aproksimacije ravnomjerno raspoređena u propusnom opsegu, a *inverzni Čebiševljevi filtri* ako je greška aproksimacije ravnomjerno raspoređena u nepropusnom opsegu.

Čebiševljevi filtri

Raspoređivanjem greške aproksimacije ravnomjerno u cijelom propusnom opsegu nastaju filtri sa karakterističnom funkcijom $K(s)$ u obliku polinoma koji osciluje uniformno između 0 i ε^2 u propusnom opsegu:

$$|K(\omega)|^2 = \varepsilon^2 C_n^2(\omega), \quad (2.63)$$

gdje je:

$$-1 \leq C_n(\omega) \leq 1 \text{ za } 0 \leq |\omega| \leq 1. \quad (2.64)$$

Mi se nećemo zadržavati na rigoroznim metodima za određivanje polinoma $C_n(\omega)$, ali je očito da polinom:

$$C_n(\omega) = \cos[n\Phi(\omega)] \quad (2.65)$$

osciluje uniformno između -1 i 1 i to sa rastućom frekvencijom kad n raste.

Iz poznatog matematičkog identiteta koji se dokazuje indukcijom:

$$\begin{aligned} \cos n\Phi(\omega) = & 2^{n-1} \cos^n \Phi(\omega) - \frac{n}{1!} 2^{n-3} \cos^{n-2} \Phi(\omega) + \frac{n(n-3)}{2!} 2^{n-5} \cos^{n-4} \Phi(\omega) \\ & - \frac{n(n-3)(n-5)}{3!} 2^{n-7} \cos^{n-6} \Phi(\omega) + \dots \end{aligned} \quad (2.66)$$

slijedi da je $\cos n\Phi(\omega)$ polinom po ω ako je:

$$\Phi(\omega) = \cos^{-1}(\omega), \quad |\omega| \leq 1. \quad (2.67)$$

Čebiševljevi polinom reda n je:

$$C_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1} \omega), \quad |\omega| \leq 1. \quad (2.68)$$

U nepropusnom opsegu, za $|\omega| \geq 1$, $\cos^{-1} \omega$ nije definisano, te se za $C_n(\omega)$ usvaja hiperbolna kosinusna funkcija koja monotono raste za $\omega > 1$:

$$C_n(\omega) = \text{ch}(n \text{ch}^{-1} \omega). \quad (2.69)$$

Prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma u propusnom opsegu ima oblik:

$$C_0(\omega) = \cos 0 = 1, \quad (2.70)$$

$$C_1(\omega) = \cos(1 \cdot \cos^{-1} \omega) = \omega, \quad (2.71)$$

$$C_2(\omega) = \cos(2 \cdot \cos^{-1} \omega) = 2[\cos(\cos^{-1} \omega)]^2 - 1 = 2\omega^2 - 1, \quad (2.72)$$

$$C_3(\omega) = \cos(3 \cdot \cos^{-1} \omega) = -3\cos(\cos^{-1} \omega) + 4[\cos(\cos^{-1} \omega)]^3 = -3\omega + 4\omega^3, \quad (2.73)$$

$$C_4(\omega) = \cos(4 \cdot \cos^{-1} \omega) = 1 - 8\omega^2 + 8\omega^4. \quad (2.74)$$

Postoji rekurzivna trigonometrijska relacija:

$$\cos[(n+1)x] = 2\cos nx \cos x - \cos[(n-1)x] \quad (2.75)$$

koja, kad se primijeni na Čebiševljeve polinome, postaje:

$$\begin{aligned} C_{n+1}(\omega) &= 2\omega C_n(\omega) - C_{n-1}(\omega), \quad n=1,2,\dots \\ C_0(\omega) &= 1, \quad C_1(\omega) = \omega. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Čebiševljev polinom n -tog reda ima sljedeće osobine:

1. $0 \leq |C_n(\omega)| \leq 1$ za $|\omega| \leq 1$, dok je $|C_n(\omega)| > 1$ za $|\omega| \geq 1$,
2. $C_n(\omega)$ je monotono rastući polinom za $|\omega| \geq 1$ i za svako n ,
3. $C_n(\omega)$ je paran polinom ako je n parno, a neparan ako je n neparno,
4. $|C_n(0)| = 1$ za n parno,
5. $|C_n(0)| = 0$ za n neparno.

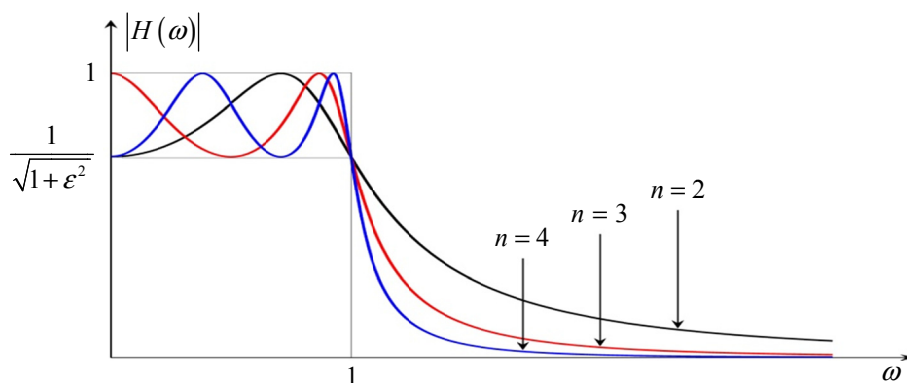
Dakle, ako se za aproksimaciju amplitudne karakteristike NP filtra koriste Čebiševljevi polinomi, funkcija prenosa NP filtra sa jednolikim oscilacijama u propusnom opsegu i bez konačnih nula transmisije se određuje iz:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)}, \tag{2.77}$$

gdje je $C_n(\omega)$ Čebiševljev polinom reda n .

Amplitudna karakteristika Čebiševljevog filtra $|H(\omega)|$ ima jednolike oscilacije u cijelom propusnom opsegu. $|H(0)| = 1$ za neparno n , a $|H(0)| = 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$ za parno n , dok je $|H(1)| = 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$, $\forall n$. Dalje, $|H(\omega)|$ monotono opada za $|\omega| > 1$. Postoji n kritičnih tačaka u propusnom opsegu gdje $|H(\omega)|$ poprima maksimalnu ili minimalnu vrijednost.

Na Slici 2.9 prikazane su amplitudne karakteristike normalizovanih Čebiševljevih filtara za red filtra $n = 2, 3, 4$.



Slika 2.9 Amplitudne karakteristike normalizovanih NP Čebiševljevih filtara za $n = 2, 3, 4$.

Polovi Čebiševljevog filtra se iz kvadrata amplitudne karakteristike:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cos^2(n \cos^{-1} \omega)} \quad (2.78)$$

određuju na sljedeći način. Uvedimo oznaku:

$$\xi = \alpha + j\beta = \cos^{-1} \frac{s}{j}. \quad (2.79)$$

tako da je:

$$s = \sigma + j\omega = j \cos(\alpha + j\beta) = j \cos \alpha \cosh \beta + \sin \alpha \sinh \beta, \quad (2.80)$$

odnosno:

$$\sigma = \sin \alpha \sinh \beta, \quad (2.81)$$

$$\omega = \cos \alpha \cosh \beta, \quad (2.82)$$

$$H(s) \cdot H(-s) = |H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cos^2(n\xi)}. \quad (2.83)$$

Lokacija polova Čebiševljevog filtra se određuje iz uslova da nazivnik funkcije prenosa bude jednak nuli:

$$1 + \varepsilon^2 \cos^2(n\xi) = 0 \Rightarrow (1 + j\varepsilon \cos n\xi)(1 - j\varepsilon \cos n\xi) = 0 \Rightarrow 1 \pm j\varepsilon \cos n\xi = 0, \quad (2.84)$$

odakle slijedi da je:

$$\cos n\xi = \cos(n\alpha + jn\beta) = \cos n\alpha \cosh n\beta - j \sin n\alpha \sinh n\beta = \pm \frac{j}{\varepsilon}, \quad (2.85)$$

$$\cos n\alpha \cosh n\beta = 0 \wedge \sin n\alpha \sinh n\beta = \pm \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2.86)$$

Rješenja sistema jednačina zapisanog sa (2.85) i (2.86) su:

$$\alpha_k = \pm \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad \beta_k = \pm \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}, \quad k > 0, \quad (2.87)$$

pa su realni i imaginarni dijelovi polova od $H(s)H(-s)$ koji se nalaze u lijevoj poluravni sljedeći:

$$\sigma_k = -\sinh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \sin \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.88)$$

$$\omega_k = \cosh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.89)$$

Koristeći identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, možemo pisati:

$$\frac{\sigma_k^2}{\sinh^2\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right)} + \frac{\omega_k^2}{\cosh^2\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right)} = 1, \quad (2.90)$$

što znači da polovi $s_k = \sigma_k + j\omega_k$ leže na elipsi čije su ose $a = \sinh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right)$ (kraća) i $b = \cosh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right)$ (duža).

Sa poznatim polovima s_k , $k = 1, 2, \dots, n$, funkcija prenosa Čebiševljevog filtra poprima oblik:

$$H(s) = \frac{1}{2^{n-1} \varepsilon \prod_{k=1}^n (s - s_k)} = \frac{1/(2^{n-1} \varepsilon)}{s^n + b_n s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}. \quad (2.91)$$

Slično kao kod Batervortovog filtra, koeficijenti b_i se računaju na osnovu položaja polova u kompleksnoj s ravni.

Pri dizajniranju Čebiševljevog filtra imamo dva parametra: valovitost ε koja je određena maksimalnim dozvoljenim slabljenjem u propusnom opsegu $\varepsilon = \sqrt{10^{0.1R_p} - 1}$ i red filtra n , koji se određuje iz uslova za slabljenje R_s na graničnoj učestanosti nepropusnog opsega ω_s :

$$-10 \log \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega_s)} \geq R_s, \quad (2.92)$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{(10^{0.1R_p} - 1)/\varepsilon^2}}{\cosh^{-1} \omega_s}. \quad (2.93)$$

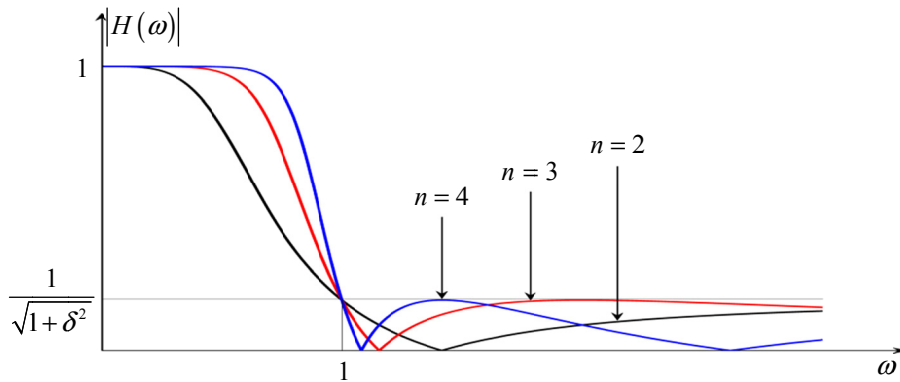
Inverzni Čebiševljevi filtri

Inverzni Čebiševljev filtar ima monotono opadajuću amplitudnu karakteristiku u propusnom opsegu i jednolike oscilacije u nepropusnom opsegu, te konačne nule transmisije, kao na Slici 2.10.

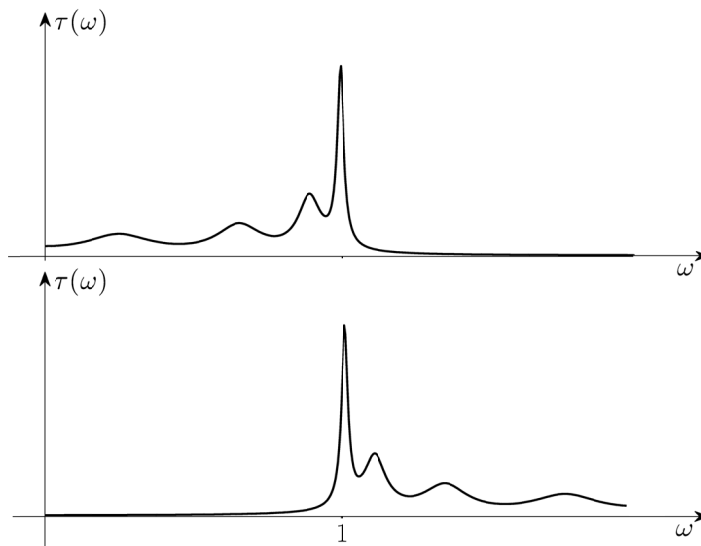
Kvadrat amplitudne karakteristike ovog filtra je dat sa:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2(1/\omega)}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(1/\omega)}. \quad (2.94)$$

Inverzni Čebiševljev filtar je jednako efikasan kao Čebiševljev filtar u smislu da je isti red filtra potreban da se zadovolje postavljeni zahtjevi za amplitudnu karakteristiku.



Slika 2.10 Amplitudne karakteristike normalizovanih NP inverznih Čebiševljevih filtara za $n = 2, 3, 4$.



Slika 2.11 Karakteristike grupnog kašnjenja filtara 8. reda za: (a) Čebiševljev i (b) inverzni Čebiševljev filtar.

Međutim, postoje velike razlike u njihovim faznim karakteristikama i grupnom kašnjenju. Čebiševljevi filtri u propusnom opsegu imaju izraženije varijacije grupnog kašnjenja nego inverzni Čebiševljevi filtri, Slika 2.11. U situacijama kada su male varijacije kašnjenja veoma važne, kao što su sistemi za prenos slike ili podataka, inverzni Čebiševljevi filtri imaju prednost.

2.3.3 Eliptički filtri

Raspoređivanjem greške aproksimacije i unutar propusnog i unutar nepropusnog opsega, uz iste postavljene zahtjeve dobija se manji red filtra u poređenju sa filtrima sa maksimalno ravnom amplitudnom karakteristikom i filtrima sa jednolikim oscilacijama.

Rezultujuća karakteristična funkcija $K(s)$ mora biti racionalna funkcija sa konačnim nulama refleksije ω_n i konačnim nulama transmisije ω_{z_i} . Karakteristična funkcija:

$$|K(\omega)|^2 = \varepsilon^2 T_n^2(\omega) \quad (2.95)$$

sa jednakim maksimumima ε^2 u propusnom opsegu i jednakim minimumima u nepropusnom opsegu, može se ostvariti eliptičkim funkcijama $T_n(\omega)$, te se rezultujući filtri, sa kvadratom amplitudne karakteristike:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega)} \quad (2.96)$$

zovu *eliptički filtri*, ili *Kauerovi* (Wilhelm Cauer, 1900-1945) *filtri*. Eliptička (u literaturi poznata i kao Čebiševljeva) racionalna funkcija $T_n(\omega)$ je data sa:

$$T_n(\omega) = k \prod_{i=1}^{n/2} \frac{\omega^2 - (\omega_s/\omega_{z_i})^2}{\omega^2 - \omega_{z_i}^2} \quad (2.97)$$

za n parno, a sa:

$$T_n(\omega) = k \omega \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{\omega^2 - (\omega_s/\omega_{z_i})^2}{\omega^2 - \omega_{z_i}^2} \quad (2.98)$$

za n neparno.

Sve frekvencije su normalizovane tako da je granica propusnog opsega $\omega_p = 1$. Konstanta k se određuje iz uslova da su maksimumi oscilacija u propusnom opsegu jednaki jedinici, te valovitost ε određuje veličinu oscilacija u propusnom opsegu i računa se kao obično.

Kada nivo oscilacija amplitudne karakteristike u nepropusnom opsegu teži ka nuli, eliptički filtri postaju jednaki Čebiševljevim filtrima, a kada se gube oscilacije u propusnom opsegu, ovi filtri postaju inverzni Čebiševljevi filtri. Eliptički filtri teže Batervortovim filtrima kada nivoi oscilacija u oba opsega, propusnom i nepropusnom, teže ka nuli.

Eksplicitno određivanje reda filtra n je veoma teško i zahtijeva izračunavanje eliptičkih integrala. Umjesto toga, često se koriste parametarske krive. U nepropusnom opsegu je $\varepsilon^2 T_n^2(\omega) \gg 1$, pa ako je R_s slabljenje na granici nepropusnog opsega za $\omega = \omega_s$, možemo uspostaviti sljedeću relaciju između $|T_n(\omega_s)|$, R_s i ε :

$$\begin{aligned} R_s &= -20 \log |H(\omega_s)| = -10 \log \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_s)} = 10 \log (1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_s)) \approx \\ &\approx 10 \log \varepsilon^2 T_n^2(\omega_s) = 20 \log \varepsilon + 20 \log |T_n(\omega_s)| \end{aligned} \quad (2.99)$$

tako da je:

$$R_s + 20 \log \frac{1}{\varepsilon} \approx 20 \log |T_n(\omega_s)|. \quad (2.100)$$

Na osnovu (2.97) i (2.98) se izračunaju Čebiševljeve racionalne funkcije na granici nepropusnog opsega $|T_n(\omega_s)|$ za različite vrijednosti reda filtra n . Dobijene vrijednosti se porede sa vrijednošću $|T_n(\omega_s)|$ koja se dobije u zavisnosti od minimalnog propisanog slabljenja u nepropusnom opsegu i valovitosti ε , na osnovu (2.100). Na taj način se radi predikcija reda filtra, pa se zatim provjerava da li su ispunjeni svi postavljeni zahtjevi. Ako nisu, red filtra se povećava dok se ne postignu željene karakteristike.

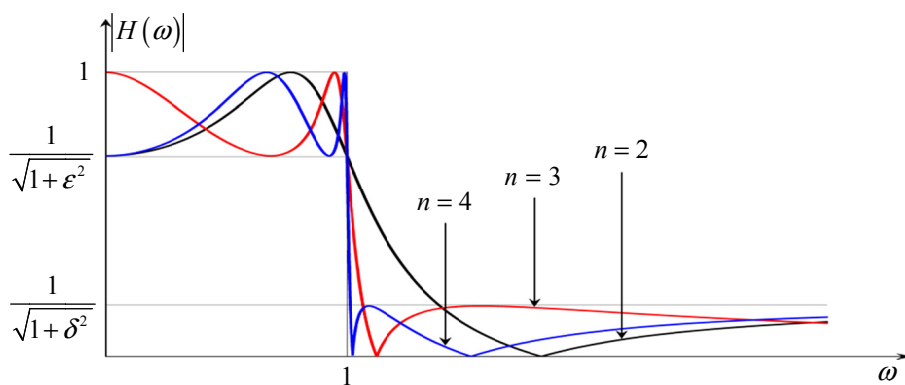
Nakon određivanja potrebnog reda filtra, kada su poznati svi parametri, mogu se odrediti nule i polovi funkcije prenosa $H(s)$. Analitički proračuni položaja polova i nula u kompleksnoj s ravni, na osnovu kojih se određuju koeficijenti u funkciji prenosa eliptičkih filtara:

$$H(s) = \frac{H \prod_{i=1}^m (s^2 + a_i)}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}, \quad (2.101)$$

izlaze iz okvira ove knjige. Pri projektovanju filtara korišćemo gotove programe koji proračunavaju ove koeficijente na osnovu postavljenih zahtjeva za amplitudnu karakteristiku filtra.

Parametar H se bira tako da vršna vrijednost pojačanja bude jednaka jedinici. Nule refleksije ω_{r_i} i nule transmisije ω_{z_i} su u geometrijskoj simetriji oko frekvencije $\sqrt{\omega_s}$, tj. $\omega_{r_i} \cdot \omega_{z_i} = \omega_s$. Od četiri parametra filtra ϵ i δ (ili ekvivalentno R_p i R_s), zatim ω_s i stepena n , tri se mogu specificirati neovisno. Na primjer, za date vrijednosti R_p , R_s i ω_s potrebno je pronaći nule transmisije ω_{z_i} , tako da $T_n(\omega)$ ima jednake minimume dovoljne visine u nepropusnom opsegu. Tada je $T_n(\omega)$ potpuno poznato.

Amplitudne karakteristike NP eliptičkih filtara za $n = 2, 3, 4$ su prikazane na Slici 2.12.



Slika 2.12 Amplitudne karakteristike normalizovanih NP eliptičkih filtara za $n = 2, 3, 4$.

2.4 Aproksimacija fazne karakteristike

Funkcije prenosa koje se koriste za aproksimaciju fazne karakteristike ili grupnog kašnjenja imaju konstantnu amplitudnu karakteristiku na svim frekvencijama. To su filtri svepropusnici, čija funkcija prenosa ima oblik:

$$H_{so}(s) = \frac{N_{so}(s)}{D_{so}(s)} = \frac{D_{so}(-s)}{D_{so}(s)}. \quad (2.102)$$

Parametri funkcije prenosa (2.102) se biraju tako da ona aproksimira željeno kašnjenje. Normalizacija frekvencijske varijable pri aproksimaciji faznih karakteristika filtera se vrši sa $\Omega_0 = 1/\tau_0$, gdje je τ_0 kašnjenje jednosmjerne komponente.

Za aproksimaciju fazne karakteristike koriste se *Beselovi (Bessel) filtri*. Na osnovu:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.103)$$

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}, \quad (2.104)$$

možemo izraziti faznu karakteristiku filtera na sljedeći način:

$$H(\omega) \cdot H(\omega) = |H(\omega)|^2 e^{j2\varphi(\omega)} = H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s=j\omega} e^{j2\varphi(\omega)}, \quad (2.105)$$

$$H(s) \cdot H(s) = H(s) \cdot H(-s) e^{j2\varphi(\omega)} \Big|_{s=j\omega}, \quad (2.106)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2j} \ln \frac{H(s)}{H(-s)} \Big|_{s=j\omega}. \quad (2.107)$$

Grupno kašnjenje:

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (2.108)$$

dobijamo na sljedeći način:

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2j} \frac{d}{d\omega} \left[\ln \frac{H(s)}{H(-s)} \Big|_{s=j\omega} \right]. \quad (2.109)$$

Izvodom logaritamske funkcije iz (2.109), uz smjenu $s = j\omega$ dobija se:

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2j} \frac{H(-\omega)}{H(\omega)} \frac{d}{d\omega} \left[\frac{H(\omega)}{H(-\omega)} \right]. \quad (2.110)$$

Koristeći formulu za izvod količnika iz (2.110), dobijamo:

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2j} \frac{H(-\omega)}{H(\omega)} \frac{H(\omega)'H(-\omega) - H(-\omega)'H(\omega)}{[H(-\omega)]^2}, \quad (2.111)$$

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2j} \frac{H(-\omega)}{H(\omega)} \frac{j \cdot H'(\omega)H(-\omega) + j \cdot H'(-\omega)H(\omega)}{[H(-\omega)]^2}. \quad (2.112)$$

U (2.111) je sa $H(\omega)'$ označen izvod po ω , dok je u (2.112) je sa $H'(\omega)$ označen izvod po $j\omega$. Nakon smjene $\omega = s/j$ u (2.112) dobijamo:

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2} \frac{H(-s)}{H(s)} \frac{H'(s)H(-s) + H'(-s)H(s)}{[H(-s)]^2} \Big|_{s=j\omega}, \quad (2.113)$$

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2} \frac{H'(s)H(-s) + H'(-s)H(s)}{H(s)H(-s)} \Big|_{s=j\omega}, \quad (2.114)$$

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2} \left[\frac{H'(s)}{H(s)} + \frac{H'(-s)}{H(-s)} \right] \Big|_{s=j\omega}. \quad (2.115)$$

Kako je $\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$, konačno se za grupno kašnjenje na imaginarnoj osi dobija:

$$\tau(\omega) = -\frac{1}{2} \left[\frac{H'(s)}{H(s)} + \frac{H'(-s)}{H(-s)} \right] \Big|_{s=j\omega} = -\mathcal{S} \left(\frac{H'(s)}{H(s)} \right) \Big|_{s=j\omega}, \quad (2.116)$$

gdje je sa $\mathcal{P}(\cdot)$ označen parni dio funkcije.

Množenjem brojnika i nazivnika funkcije prenosa $H(s)$ sa $N(-s)$ dobijamo:

$$H(s) = \frac{N(s)N(-s)}{D(s)N(-s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad (2.117)$$

pa grupno kašnjenje možemo zapisati u obliku:

$$\tau(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{P'(s)}{P(s)} + \frac{P'(-s)}{P(-s)} \right)_{s=j\omega} = \mathcal{P} \left(\frac{P'(s)}{P(s)} \right)_{s=j\omega}. \quad (2.118)$$

Problem pronalaženja funkcije prenosa $H(s)$ sa željenim grupnim kašnjenjem $\tau(\omega)$ se svodi na pronalaženje polinoma $P(s) = N(-s) \cdot D(s)$ takvog da $\mathcal{P}(P'(s)/P(s))$ duž $j\omega$ ose aproksimira željeno kašnjenje. Često je za to potrebna pomoć numeričkih metoda. Jednom kad se pronađe polinom $P(s)$ mora se izvršiti njegova faktorizacija na $N(-s)$ i $D(s)$, pri čemu je $D(s)$ Hurvicov polinom stepena n ne manjeg od stepena m polinoma $N(s)$. Dakle, $P(s)$ mora u lijevoj poluravni da ima najmanje toliko korijena koliko ih ima u desnoj poluravni.

Jednačina (2.118) se sad može koristiti za pronalaženje aproksimacije funkcije prenosa NP filtra bez konačnih nula transmisije u obliku:

$$H(s) = Ke^{-s\tau_0}, \quad (2.119)$$

što je idealna funkcija prenosa mreže bez izobličenja, koja samo unosi konstantno kašnjenje τ_0 i konstantno pojačanje $20 \log K$.

Nakon normalizacije amplitudne karakteristike sa K :

$$H(s) = e^{-s\tau_0}, \quad (2.120)$$

i kompleksne učestanosti s sa $\Omega_0 = 1/\tau_0$, dobijamo funkciju prenosa normalizovanog filtra:

$$H(s) = e^{-\frac{s}{\tau_0}} = e^{-\frac{s}{\Omega_0}} \Bigg|_{\frac{s}{\Omega_0} \rightarrow s} = e^{-s}. \quad (2.121)$$

Potrebno je pronaći funkciju prenosa u obliku:

$$H(s) = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0} = \frac{b_0}{D(s)} \quad (2.122)$$

koja na neki način aproksimira funkciju e^{-s} . Uvrštavajući ovakav oblik funkcije prenosa (2.122) u izraz (2.118) za grupno kašnjenje, dobijamo:

$$\tau(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{D'(s)}{D(s)} + \frac{D'(-s)}{D(-s)} \right) \Bigg|_{s=j\omega} = \frac{D'(s)D(-s) + D'(-s)D(s)}{2D(s)D(-s)} \Bigg|_{s=j\omega}. \quad (2.123)$$

Grupno kašnjenje $\tau(\omega)$ u (2.123) nije konstantno, ali može aproksimirati konstantu. Ako prilikom aproksimacije želimo da racionalna funkcija (2.123) bude maksimalno ravna, na sličan način kao kod Batervortovih filtara, (2.123) treba svesti na oblik $\frac{N^2}{N^2 + a_n \omega^{2n}}$, gdje je n stepen polinoma $D(s)$. Kako je polinom u brojniku (2.123) stepena $2n-1$, a u nazivniku stepena $2n$ sa koeficijentom uz najviši stepen ω^{2n} jednakim $2(-1)^n$, to znači da na $j\omega$ osi moramo zadovoljiti uslov da je:

$$2D(s)D(-s) = D'(s)D(-s) + D'(-s)D(s) + 2(-1)^n s^{2n}, \quad (2.124)$$

odnosno:

$$s^{-2n} \left\{ \frac{1}{2} [D'(s)D(-s) + D'(-s)D(s)] - D(s)D(-s) \right\} = (-1)^{n+1}, \quad (2.125)$$

što se može svesti na:

$$s^{-2n} \{ \mathcal{D} [D'(s)D(-s)] - D(s)D(-s) \} = (-1)^{n+1}. \quad (2.126)$$

Diferenciranjem po s dobijamo:

$$\mathcal{D} \{ [sD''(s) - 2(n+s)D'(s) + 2nD(s)] D(-s) \} = 0, \quad (2.127)$$

što mora da vrijedi za svako s , ako hoćemo da $H(s)$ ima maksimalno ravno kašnjenje. Kako $D(s) \equiv 0$ nije koristan rezultat, vrijedi da je:

$$sD''(s) - 2(n+s)D'(s) + 2nD(s) \equiv 0. \quad (2.128)$$

Matematičkom indukcijom se može dokazati da je rješenje diferencijalne jednačine po $D(s)$ date sa (2.128) Hurvicov polinom:

$$D(s) = \sum_{i=1}^n b_i s^i, \quad b_i = \frac{(2n-i)!}{2^{n-i} i! (n-i)!}, \quad i=0,1,\dots,n-1, \quad b_n=1. \quad (2.129)$$

Zbog veze (2.129) sa *Beselovim polinomima*, rezultujući filtri se nazivaju Beselovi filtri. Beselovi polinomi višeg reda se mogu dobiti rekurzivnom formulom:

$$D_n(s) = (2n-1)D_{n-1}(s) + s^2 D_{n-2}(s). \quad (2.130)$$

Sa porastom reda filtra n raste tačnost aproksimacije grupnog kašnjenja. Posmatrajmo:

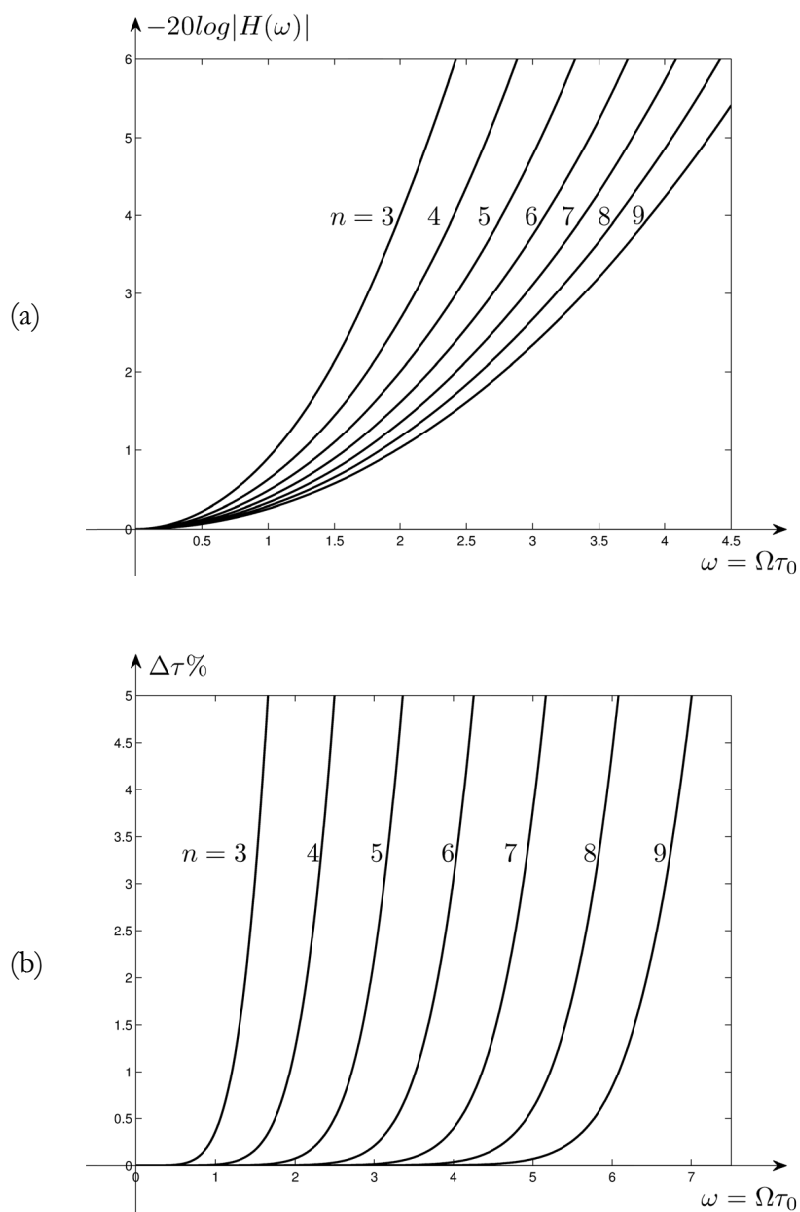
$$\frac{b_i}{b_0} = \frac{(2n-i)!}{2^{n-i} i! (n-i)!} \cdot \frac{2^n n!}{2n!} = \frac{\frac{n!}{(n-i)!}}{2n!} \cdot \frac{1}{2^{-i} i!}. \quad (2.131)$$

Kada $n \rightarrow \infty$ dobijamo:

$$\frac{b_i}{b_0} \rightarrow \frac{n^i}{(2n)^i} \cdot \frac{1}{2^{-i} i!} = \frac{1}{i!}, \quad (2.132)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0}{b_0 \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{b_0} s^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} s^i} = e^{-s}, \quad (2.133)$$

kao što smo i željeli. Naravno, za konačan red filtra n , funkcija prenosa $H(s)$ sa konačnom greškom aproksimira amplitudnu karakteristiku i grupno kašnjenje.

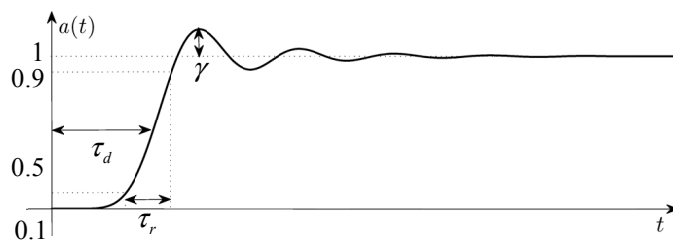


Slika 2.13 (a) Slabljenje i (b) greška grupnog kašnjenja Beselovih filtara u zavisnosti od reda filtra.

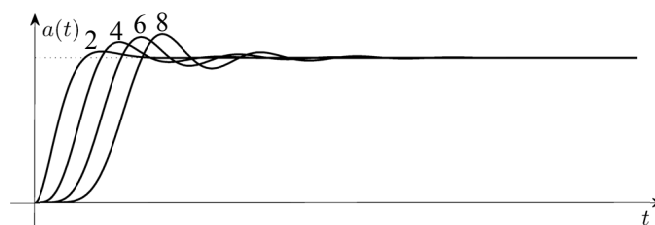
Jedan jedini parametar, red Beselovog filtra n , mora biti pažljivo odabran, tako da obje ove greške budu prihvatljivo male. Za određivanje reda filtra mogu se koristiti numerički postupci ili dijagrami koji prikazuju slabljenja i normalizovane greške grupnog kašnjenja u procentima u zavisnosti od reda filtra i normalizovane frekvencije $\omega = \Omega \tau_0$, kao što je prikazano na Slici 2.13.

2.5 Karakteristike filtara u vremenskom domenu

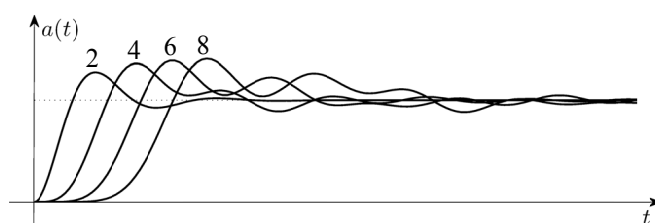
Osnovne parametri filtara koji u vremenskom domenu određuju prelazni proces, prikazani su na Slici 2.14. *Kašnjenje* τ_d se definiše kao vrijeme potrebno da jedinični odskočni odziv dostigne polovinu svoje krajnje vrijednosti (odnosno da impulsni odziv dostigne svoju maksimalnu vrijednost), dok se *vrijeme porasta* τ_r definiše kao vrijeme koje je potrebno da jedinični odziv poraste sa 10% na 90% svoje krajnje vrijednosti. *Premašenje* γ je razlika između vršne i krajnje vrijednosti jediničnog odskočnog odziva. Na slikama 2.15-2.20 prikazani su primjeri jediničnih odskočnih i impulsnih odziva nekih filtara.



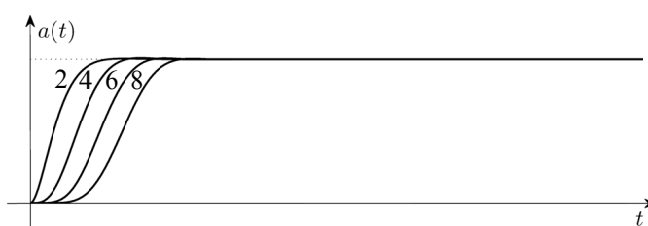
Slika 2.14 Parametri prelaznog procesa prikazani na normalizovanom jediničnom odskočnom odzivu.



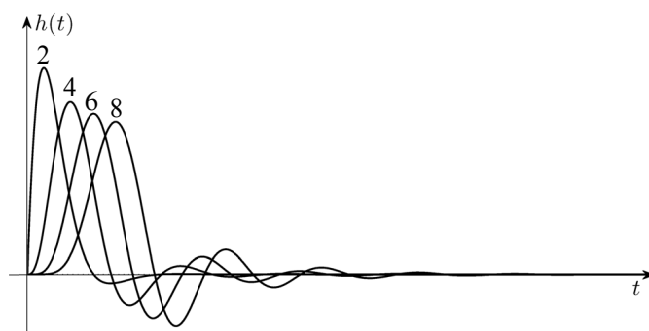
Slika 2.15 Jedinični odskočni odzivi Batervortovih filtara reda 2,4,6 i 8.



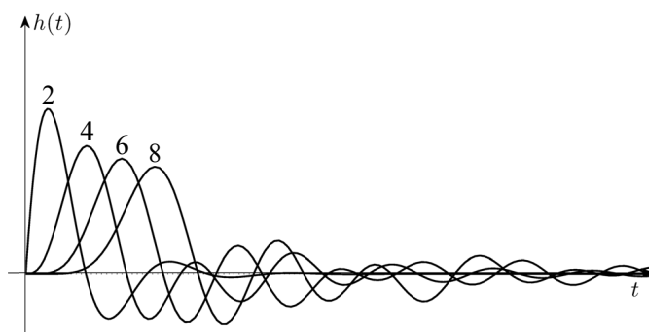
Slika 2.16 Jedinični odskočni odzivi Čebiševljevih filtara sa 3 dB slabljenjem reda 2,4,6 i 8.



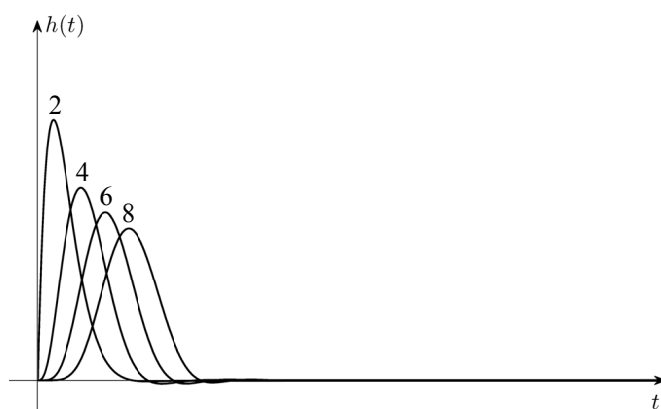
Slika 2.17 Jedinični odskočni odzivi Beselovih filtara reda 2,4,6 i 8.



Slika 2.18 Impulsni odzivi Batervortovih filtara reda 2,4,6 i 8.



Slika 2.19 Impulsni odzivi Čebiševljevih filtara sa 3 dB slabljenjem reda 2,4,6 i 8.

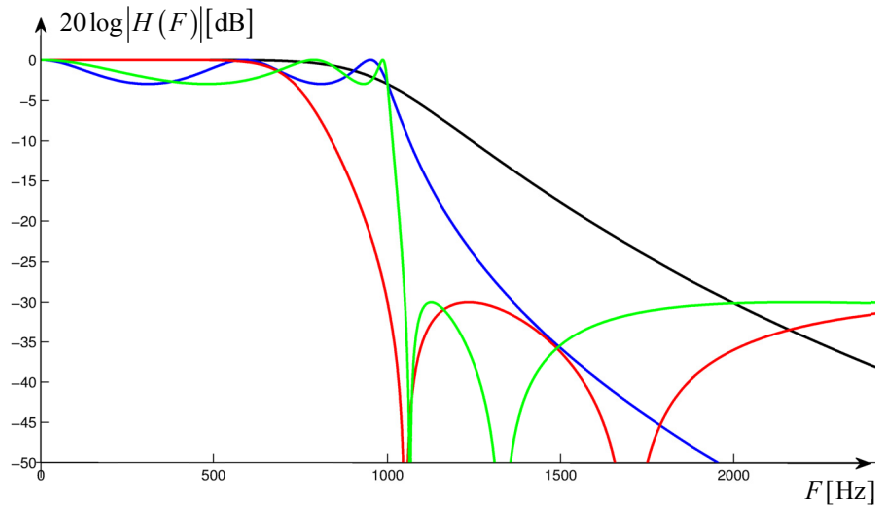


Slika 2.20 Impulsni odzivi Beselovih filtara reda 2,4,6 i 8.

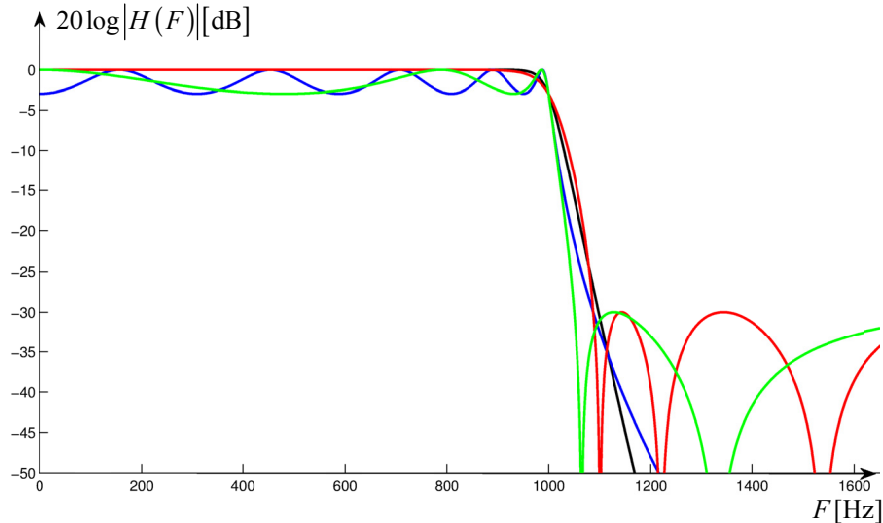
2.6 Uporedne karakteristike analognih filtara

Za datu specifikaciju amplitudne karakteristike, red eliptičkog je manji nego red Čebiševljevog filtra, dok je Batervortov filter najvećeg reda. Osnovni razlog za ove razlike leži u distribuciji greške aproksimacije i konačnim nulama transmisijske, zbog kojih eliptički filtri imaju vrlo strmu karakteristiku u prelaznom opsegu. Uporedne amplitudne karakteristike filtara istog reda prikazane su na Slici 2.21, za red filtra pet, maksimalno dozvoljeno slabljenje u PO od 3 dB i minimalno potrebno slabljenje u NPO od 30 dB. Prelazni opseg je najširi kod Batervortovog filtra, nešto uži kod Čebiševljevog, dok eliptički filtri imaju najstrmiju amplitudnu karakteristiku u prelaznom opsegu. Najzahtjevniji parametar pri specifikaciji filtara je širina prelaznog opsega. Na primjer, pri projektovanju NP filtra sa maksimalnim dozvoljenim slabljenjem u PO od 0.5 dB i minimalnim propisanim slabljenjem od 23 dB u NPO, pri $\omega_s = 1.6$, potreban je Batervortov filter osmog reda, Čebiševljev petog i eliptički filter trećeg reda. Za iste specifikacije slabljenja, ali sa $\omega_s = 1.1$ umjesto $\omega_s = 1.6$, potreban je Batervortov filter trideset i devetog reda, Čebiševljev filter desetog reda i eliptički filter petog reda. Manji uticaj na red filtra imaju propisana slabljenja, tako da se pri $\omega_s = 1.1$, ali uz dozvoljeno slabljenje u PO od 3 dB i minimalno potrebno slabljenje od 30 dB u NPO, dobije da su potrebni Batervortov filter trideset i sedmog reda, Čebiševljevi filtri desetog reda i eliptički petog reda, čije su karakteristike prikazane na Slici 2.22.

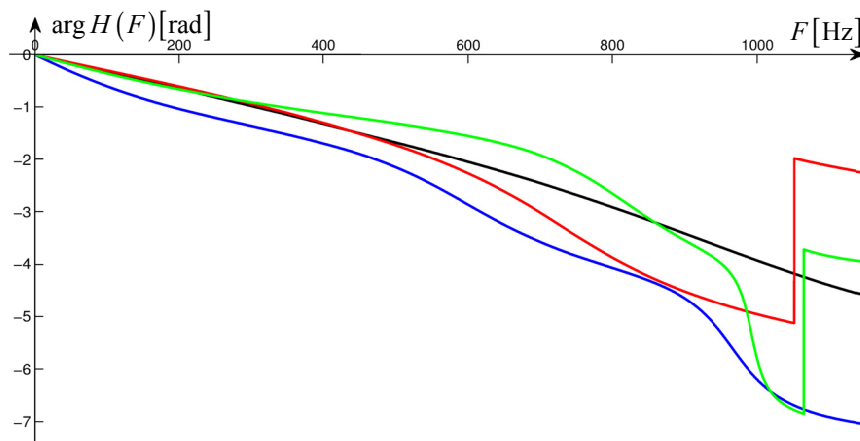
Sljedeće što nas zanima kad poredimo filtre je fazna karakteristika, odnosno grupno kašnjenje. Za isti red filtra, Čebiševljevi i eliptički filtri imaju nelinearnije fazne karakteristike i krive grupnog kašnjenja sa izraženijim vrhovima od Batervortovih filtara. Na Slici 2.23 prikazane su fazne karakteristike Batervortovog, Čebiševljevog, inverznog Čebiševljevog i eliptičkog filtra petog reda. Međutim, ovakav način poređenja nije u potpunosti korektan, već je bolje porediti filtre koji zadovoljavaju iste zahtjeve, umjesto filtara istog reda. Na Slici 2.24 prikazane su fazne karakteristike za Batervortov filter trideset i sedmog reda, Čebiševljev filter desetog reda, inverzni Čebiševljev filter desetog reda i eliptički filter petog reda čije amplitudne karakteristike zadovoljavaju sljedeće zahtjeve: $F_p = 1\text{kHz}$, $F_s = 1.1\text{kHz}$, $R_p = 3\text{dB}$ i $R_s = 30\text{dB}$. Primjetno je da u najvećem dijelu propusnog opsega eliptički i inverzni Čebiševljev filter imaju manji nagib fazne karakteristike, a time i manje grupno kašnjenje.



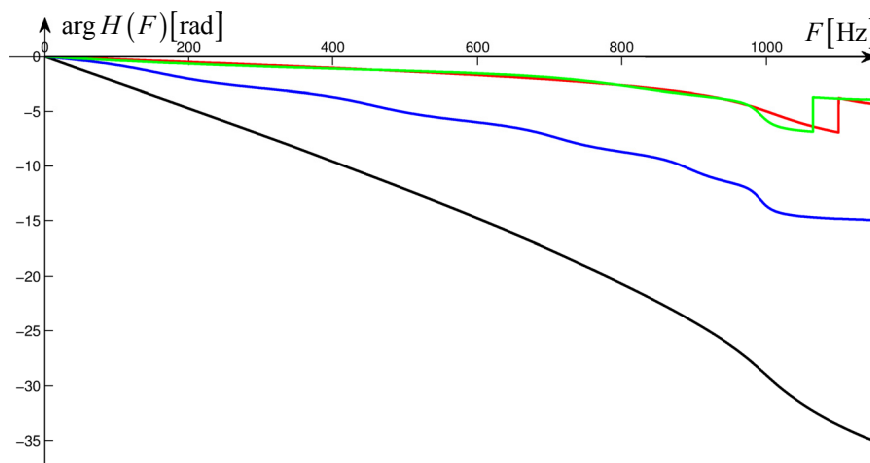
Slika 2.21 Amplitudne karakteristike Batervortovog (crno), Čebiševljevog (plavo), inverznog Čebiševljevog (crveno) i eliptičkog (zeleno) filtra petog reda.



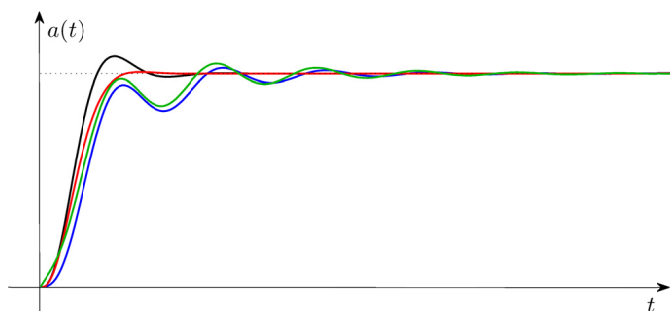
Slika 2.22 Amplitudne karakteristike Batervortovog filtra trideset i sedmog reda (crno), Čebiševljevog filtra desetog reda (plavo), inverznog Čebiševljevog filtra desetog reda (crveno), i eliptičkog filtra petog reda (zeleno) koji ispunjavaju zahtjeve: $F_p = 1\text{kHz}$, $F_s = 1.1\text{kHz}$, $R_p = 3\text{dB}$ i $R_s = 30\text{dB}$.



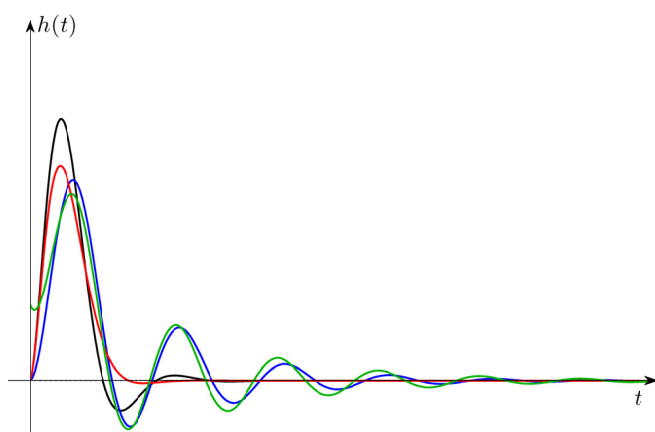
Slika 2.23 Fazne karakteristike Batervortovog (crno), Čebiševljevog (plavo), inverznog Čebiševljevog (crveno) i eliptičkog (zeleno) filtra petog reda.



Slika 2.24 Fazne karakteristike Batervortovog filtra trideset i sedmog reda (crno), Čebiševljevog filtra desetog reda (plavo), inverznog Čebiševljevog filtra desetog reda (crveno), i eliptičkog filtra petog reda (zeleno) koji ispunjavaju zahtjeve: $F_p = 1\text{kHz}$, $F_s = 1.1\text{kHz}$, $R_p = 3\text{dB}$ i $R_s = 30\text{dB}$.



Slika 2.25 Jedinični odskočni odzivi Batervortovog (crno), Čebiševljevog (plavo), eliptičkog (zeleno) i Beselovog (crveno) filtra trećeg reda.



Slika 2.26 Impulsni odzivi Batervortovog (crno), Čebiševljevog (plavo), eliptičkog (zeleno) i Beselovog (crveno) filtra trećeg reda.

Uporedne karakteristike filtara u vremenskom domenu prikazane su preko jediničnih odskočnih i impulsnih odziva na Slici 2.25 i Slici 2.26, respektivno. Eliptički i Čebiševljevi filtri, čiji se polovi nalaze bliže imaginarnoj osi, imaju izreženije oscilacije i duže trajanje prelaznog procesa nego Beselovi i Batervortovi filtri.

2.7 Frekvencijske transformacije

Iz NP prototipa mogu se izvesti funkcije prenosa ostalih tipova filtara. Označimo sa:

$$\bar{s} = \bar{\sigma} + j\bar{\omega} \quad (2.134)$$

normalizovanu kompleksnu učestanost NP filtra tako da je $\bar{\omega}=1$ granica propusnog opsega, zatim sa:

$$s = \sigma + j\omega \quad (2.135)$$

normalizovanu kompleksnu učestanost željenog filtra i sa Ω nenormalizovanu frekvenciju.

Ideja se sastoji u određivanju funkcije preslikavanja:

$$\bar{s} = F(s), \quad (2.136)$$

koja će transformisati propusne i nepropusne opsege željenog filtra u propusni, odnosno nepropusni opseg NP filtra. Ako u funkciji prenosa NP filtra kompleksnu učestanost \bar{s} zamijenimo sa $F(s)$, dobićemo funkciju prenosa željenog filtra.

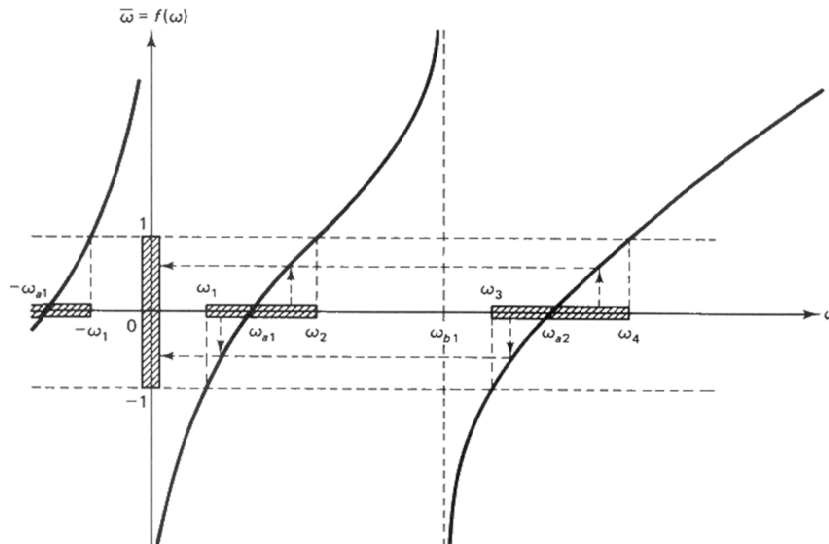
Kako je funkcija prenosa željenog filtra realna racionalna funkcija, slijedi da funkcija preslikavanja $F(s)$ mora biti neparna realna racionalna funkcija takva da je:

$$\bar{s} = j\bar{\omega} = F(j\omega) = jf(\omega). \quad (2.137)$$

Frekvencijska transformaciona funkcija:

$$\bar{\omega} = f(\omega) \quad (2.138)$$

se bira tako da sve propusne opsege željenog filtra transformiše u propusni opseg NP filtra $|\bar{\omega}| \leq 1$, a sve nepropusne opsege željenog filtra u nepropusni opseg NP filtra $|\bar{\omega}| > 1$. Zbog jednoznačnosti preslikavanja, frekvencijska transformaciona funkcija je monotono rastuća, te $f(\omega)$ ima jednostruke



Slika 2.27 Primjer frekvencijske transformacione funkcije.

nule ω_{a_i} u svakom propusnom opsegu i jednostruke polove ω_{b_i} u svakom nepropusnom opsegu, kako je prikazano na Slici 2.27. Opšte forme frekvencijske transformacione funkcije $f(\omega)$ i funkcije preslikavanja $F(s)$ su date sa:

$$\bar{\omega} = f(\omega) = K \frac{(\omega^2 - \omega_{a_1}^2)(\omega^2 - \omega_{a_2}^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{a_n}^2)(\omega^2 - \omega_{a_n}^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_{b_1}^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{b_m}^2)}, \quad (2.139)$$

$$\bar{s} = F(s) = K \frac{(s^2 + \omega_{a_1}^2)(s^2 + \omega_{a_2}^2) \cdots (s^2 + \omega_{a_n}^2)}{s(s^2 + \omega_{b_1}^2) \cdots (s^2 + \omega_{b_m}^2)}. \quad (2.140)$$

Transformacija niskopropusnog u visokopropusni filter

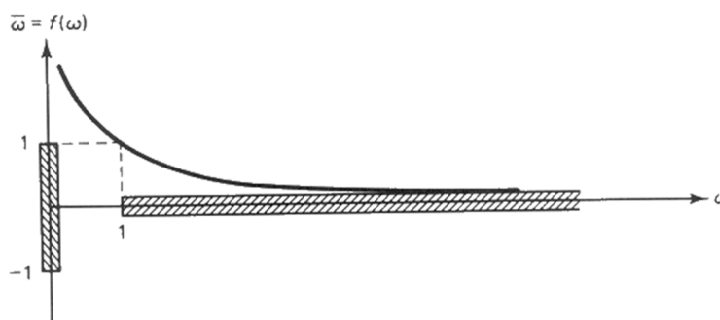
Učestanosti VP filtra se normalizuju sa graničnom učestanošću propusnog opseg Ω_p , tako da je normalizovana granična učestanost propusnog opsega $\omega_p = 1$. Propusni opseg VP filtra $|\omega| \geq 1$ treba preslikati u propusni opseg NP filtra $|\bar{\omega}| \leq 1$, a nepropusni opseg VP filtra $|\omega| < 1$ u nepropusni opseg NP filtra $|\bar{\omega}| > 1$. Pri tome frekvenijska transformaciona funkcija treba da ima oblik dat sa (2.139). Ove zahtjeve će zadovoljiti funkcija koja ima pol $\omega = 0$ i nulu u beskonačnosti, uz $f(1) = 1$, kao na Slici 2.28. Prema tome, frekvenijska transformaciona funkcija je:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\omega} \quad (2.141)$$

Funkcijom preslikavanja:

$$\bar{s} = \frac{1}{s} \quad (2.142)$$

se funkcija prenosa NP filtra prevodi u funkciju prenosa VP filtra.



Slika 2.28 Transformacija propusnog i nepropusnog opsega VP filtra u propusni i nepropusni opseg NP filtra. Propusni opsezi su šrafirani.

Transformacija niskopropusnog filtra u filter propusnik opsega

Da bi propusni opseg filtra PO $\omega_l \leq \omega \leq \omega_u$ preslikala u propusni opseg NP filtra $|\bar{\omega}| \leq 1$, a nepropusne opsege filtra PO $\omega < \omega_l$ i $\omega > \omega_u$ u nepropusni opseg NP filtra $|\bar{\omega}| > 1$ i pri tome zadovoljila opštu formu datu sa (2.139), frekvencijska transformaciona funkcija treba da ima oblik kao na Slici 2.29, tj. da bude monotono rastuća sa nulom u $|\bar{\omega}|=1$ i polovima u nuli i beskonačnosti:

$$\bar{\omega} = K \frac{\omega^2 - 1}{\omega}. \quad (2.143)$$

Granične učestanosti propusnog opsega ω_l i ω_u se preslikavaju u ± 1 . Stoga rješavanjem jednačine $|\bar{\omega}|=1 \Rightarrow \omega^2 \pm \frac{1}{K}\omega - 1 = 0$ dobijamo $\omega_u - \omega_l = K^{-1}$ i $\omega_l \omega_u = 1$. Dakle, normalizujuća učestanost Ω_0 treba da bude geometrijska sredina graničnih učestanosti $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_l \Omega_u}$, dok je parametar K zapravo faktor kvaliteta:

$$K = \frac{1}{\omega_u - \omega_l} = \frac{\Omega_0}{\Omega_u - \Omega_l} = \frac{\Omega_0}{B} = Q, \quad (2.144)$$

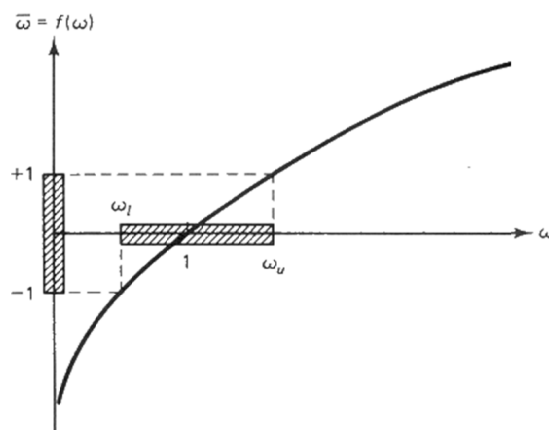
gdje je:

$$B = \Omega_u - \Omega_l \quad (2.145)$$

širina propusnog opsega.

Dakle, funkcija preslikavanja kojom se funkcija prenosa NP filtra prevodi u funkciju prenosa filtra PO je data sa:

$$\bar{s} = \frac{\Omega_0}{B} \frac{s^2 + 1}{s} = Q \frac{s^2 + 1}{s}. \quad (2.146)$$



Slika 2.29 Transformacija propusnog i nepropusnih opsega filtra PO u propusni i nepropusni opseg NP filtra. Propusni opsezi su šrafirani.

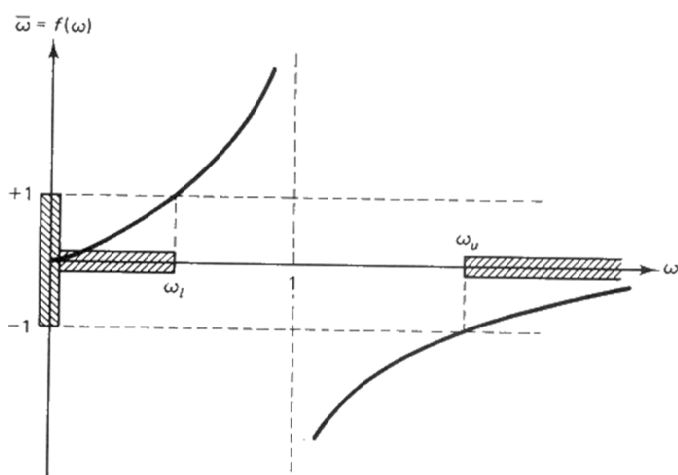
Treba napomenuti da ova transformacija uvijek rezultuje simetričnim filtrom PO, kod koga oba nepropusna opsega imaju pojednako slabljenje i širine oba prelazna opsega su podjednake.

Transformacija niskopropusnog filtra u filter nepropusnik opsega

Frekvencijska transformaciona funkcija (2.141) mijenja pozicije propusnog i nepropusnog opsega. To znači da bi primjenom funkcije preslikavnja (2.142) na filter PO dobili filter NPO. Stoga je željena funkcija preslikavanja koja prevodi funkciju prenosa NP filtra u funkciju prenosa filtra NPO recipročna funkciji preslikavanja koja prevodi funkciju prenosa NP filtra u funkciju prenosa filtra PO:

$$\bar{s} = \frac{1}{Q} \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{B}{\Omega_0} \frac{s}{s^2 + 1}. \quad (2.147)$$

Frekvencijska transformaciona funkcija je prikazana na Slici 2.30. Ovom transformacijom se dobije simetrični filter NPO sa jednakim osobinama u oba propusna i oba prelazna opsega.



Slika 2.30 Transformacija propusnih i nepropusnog opsega filtra NPO u propusni i nepropusni opseg NP filtra. Propusni opsezi su šrafirani.